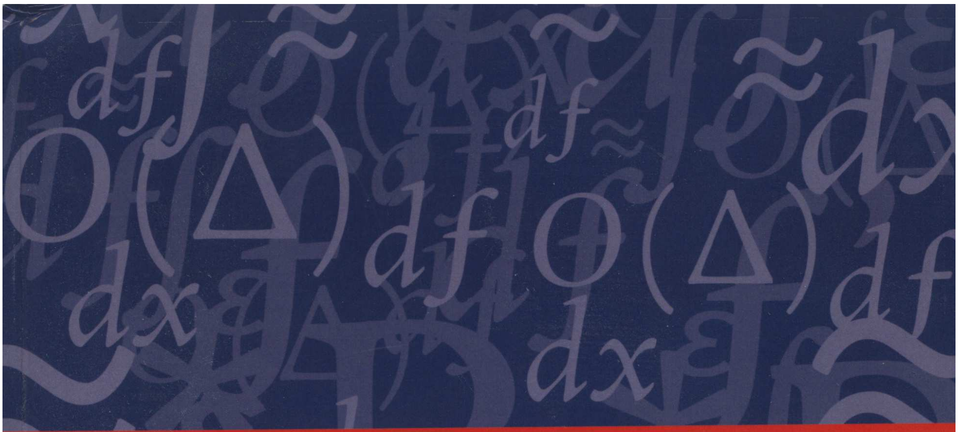


André PÉTRY

ANALYSE INFINITÉSIMALE

VOLUME 1

Céfal

Collection ***Céfal SUP***
dirigée par
Jacques De Caluwé

Collection publiée
avec l'appui du CÉLES

Les Éditions du Céfal

Boulevard Frère-Orban, 31
4000 Liège (Belgique)
Tél. : + 32 (0)4 254 25 20
Fax : + 32 (0)4 254 24 40
Courriel : cefal@skynet.be
http ://www.cefal.com

Imprimé en Belgique

D/2013/3273/6
EAN : 978-2-87130-353-4

Analyse infinitésimale

Volume 1

André Pétry

Table des matières

Préface

Ces notes d'Analyse s'intitulent Analyse infinitésimale. En effet elles se basent de façon essentielle sur la notion d'infiniment petit. Pour ce faire, j'utilise un cadre et des méthodes issues de l'Analyse non standard et plus particulièrement la présentation donnée par H.J. Keisler ([9]). J'utilise l'approche infinitésimale et les méthodes de l'Analyse non standard depuis presque une vingtaine d'années dans le cadre d'un cours d'Analyse destiné à de futurs ingénieurs industriels.

L'Analyse non standard a été introduite en 1961 par A. Robinson *([17]), elle permet de donner un cadre rigoureux et solide aux méthodes et arguments infinitésimaux, elle introduit les différents concepts de l'Analyse mathématique (dérivées, intégrales...) en utilisant la notion de nombres infiniment petits et cela dans la tradition initiée par les savants des 17e et 18e siècles. L'Analyse non standard rend cohérente la notion d'infiniment petit et permet de développer l'Analyse mathématique sur cette base comme le faisaient dès le 17e siècle d'abord* P. Fermat, I. Newton, G.W. Leibniz *et ensuite leurs illustres successeurs, les frères* Bernoulli, Euler. . . .

Pourquoi utiliser les notions infinitésimales et des méthodes issues de l'Analyse non standard au niveau de l'enseignement ? Les raisons en sont multiples, notamment :

- *la notion de nombres infinitésimaux a un contenu intuitif indiscutable, cela se traduit par des formulations simples, naturelles et concrètes des principales notions de l'Analyse ;*
- *on peut traiter très simplement les notions d'ordre de grandeur ;*
- *l'outil mathématique ainsi construit est directement utilisable dans les diverses sciences et applications ;*
- *on peut mieux faire cohabiter intuition, invention et rigueur.*

Les trois thèmes de ce premier volume sont : les dérivées, les intégrales et les équations différentielles, le plus souvent on se limite à considérer des fonctions d'une variable. Le volume 2 est consacré pour une bonne part aux fonctions de plusieurs variables. Dans les présentations "classiques[1]" de l'Analyse, les notions de dérivée et d'intégrale reposent sur la notion de limite, tout se passe alors dans le "monde"

1. l'adjectif "classique" est ici usurpé car il fait référence à la présentation de l'Analyse introduite au 19e siècle tandis que la présentation infinitésimale date du 17e siècle !

des nombres réels. Il n'en est pas ainsi en Analyse non standard, comme d'ailleurs il n'en n'était pas ainsi pour les savants et mathématiciens qui ont fondé l'Analyse : Leibniz, Euler *...ne connaissaient pas les limites !*[2]*. En Analyse non standard et dans la présentation ici suivie, on se place dans un ensemble de nombres plus riche que l'ensemble des nombres réels ; parmi ces nombres on trouve notamment les quantités infinitésimales utilisées dès le 17e siècle. Ces nombres étendant les nombres réels sont appelés les nombres hyperréels.*

La notion de nombre est donc ici particulièrement importante. Ainsi le premier chapitre est consacré à un voyage à travers les nombres habituels et, dès le chapitre 2, on apprend à connaître et à se familariser avec les nombres hyperréels. Les dérivées apparaissent au chapitre 3. Les notions d'ordre de grandeur sont essentielles, on les étudie dès le chapitre 6. Les tangentes à une courbe ont ici une présentation particulièrement simple et sont étudiées au chapitre 7. Les intégrales apparaissent au chapitre 11. Les deux derniers chapitres de ce premier volume sont consacrés aux équations différentielles. La théorie et les applications cohabitent, ainsi à côté de démonstrations et justifications théoriques, on trouve des exemples et de nombreux exercices.

Que l'on se rassure, l'outil mathématique obtenu via les méthodes non standard contient les résultats "classiques", ainsi la plupart des théorèmes importants restent dans leur formulation inchangés et, au niveau des exercices, on continue à calculer les intégrales et résoudre les équations différentielles de façon usuelle. Mais on espère que l'outil mathématique aura acquis plus de proximité, plus de sens concret et donc plus de disponibilité en vue de son utilisation.

Ces notes sont le manuel du cours d'Analyse enseigné dans le département Ingénieur industriel de la Haute Ecole de la Province de Liège, le volume 1 est utilisé en bachelier 1 et le volume 2 est à destination des bacheliers 2.

Je remercie mes collègues qui m'ont aidé dans ce travail, d'abord mon épouse Jacqueline Havelange, *mais aussi* Yvette Leyen, *pour leur aide et leur contribution à notre travail d'enseignement.*

Août 2011, A. Pétry

2. la notion de limite apparaît, sans doute pour la première fois, chez d'Alembert à la moitié du 18e siècle et c'est Cauchy qui, entre 1820 et 1830, est le premier à les utiliser de façon systématique pour développer l'Analyse.

Chapitre 1

Notions de nombres

Les nombres jouent en Mathématiques un rôle essentiel, particulièrement dans la présentation suivie ici. Mais que signifie le mot “nombre” ? Au travers d'une promenade informelle parmi des nombres “classiques”, on voudrait appréhender cette notion. Mais auparavant voici quelques précisions utiles.

1.1 Variables, constantes,. . . , ensembles

En Mathématiques on considère des ‘objets’ fort différents : des nombres, des vecteurs, des points, des droites, des fonctions . . . . Pour désigner ces objets, pour les manipuler, on considère des symboles, le plus souvent des lettres, que l'on qualifie suivant leur utilisation de *variables* ou de *constantes*. Les **variables** représentent des nombres, des points . . . non fixés, censés pouvoir *varier*, dans un domaine connu, par exemple dans les entiers, dans les nombres réels, dans un plan . . . . Les variables peuvent représenter des objets inconnus, qui pourraient d'ailleurs ne pas exister (par exemple certaines équations n'ont pas de solution). Les **constantes** représentent des nombres, des points . . . fixés. Ces constantes peuvent être *explicitées*, l'objet considéré est alors explicitement précisé, par exemple 0, 1, 127, π représentent des nombres bien précis. Une constante peut aussi représenter un objet fixé sans qu'on ait explicité son contenu, par exemple on dit :

“*soit* r *un réel fixé . . . , fixons un naturel* m *. . .*”

On est aussi amené à convenir de notations, pour ce faire on utilise souvent le symbole d'assignation := . Par exemple

$$u := x^2 + x + 1$$

signifie qu'on convient que u représente l'expression x^2+x+1 . Ainsi au lieu d'écrire

posons $a = u + v$ *et* $b = u - v$*, il s'ensuit* $u = \frac{a+b}{2}$ *et* $v = \frac{a-b}{2}$

on préférera d'écrire

posons $a := u + v$ *et* $b := u - v$*, il s'ensuit* $u = \frac{a+b}{2}$ *et* $v = \frac{a-b}{2}$.

Par *proposition* on entend une formulation précise et non ambigüe d'une propriété. Pour signifier que dans la formulation d'une proposition intervient la variable x, on représente la proposition par $\mathcal{P}(x)$, bien entendu $\mathcal{P}(u)$ représente alors la proposition $\mathcal{P}(x)$ où la variable x est remplacée partout par u. On procède de façon analogue pour une proposition faisant appel à deux variables x, y en écrivant $\mathcal{P}(x, y)$.

Rappelons les conventions et notations ensemblistes usuelles. Un **ensemble** est une collection d'objets ; si E représente cette collection d'objets et si a est un des objets la composant, on dit que a est un **élément** de E, ce qui est noté $a \in E$.

Soient A, B des ensembles. A et B sont égaux, en abrégé $A = B$, lorsque A et B ont les mêmes éléments ; A est **inclus** dans B, ou A est une **partie** de B, en abrégé $A \subset B$, lorsque tout élément de A est un élément de B.

La notation suivante est très souvent utilisée : considérons une proposition $\mathcal{P}(x)$, on désigne alors par

$$\{x \,:\, \mathcal{P}(x)\}$$

l'ensemble dont les éléments sont les objets u tels que la proposition $\mathcal{P}(u)$ soit vérifiée.

Considérons des objets u, v, w.... On note $\{u\}$ l'ensemble dont le seul élément est u ; on note $\{u, v\}$ l'ensemble dont les éléments sont u et v, de même $\{u, v, w\}$ l'ensemble dont les éléments sont u, v et w. Bien entendu on ferait de même avec quatre objets, cinq objets ....

Considérons des ensembles A et B, alors l'**union** de A et de B, notée $A \cup B$, l'**intersection** de A et de B, notée $A \cap B$, le **complémentaire** de B dans A, noté $A \setminus B$, sont définis par :

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x \,:\, x \in A \text{ ou } x \in B\}\,, \\ A \cap B &:= \{x \,:\, x \in A \text{ et } x \in B\}\,, \\ A \setminus B &:= \{x \,:\, x \in A \text{ et } x \notin B\}\,. \end{aligned}$$

L'**ensemble vide** noté $\emptyset$ est l'ensemble n'ayant aucun élément. Deux ensembles sont dits **disjoints** lorsque leur intersection est vide.

1.2 Nombres naturels

Les **nombres naturels** (plus simplement les naturels) sont les nombres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots\,,$$

ce sont donc les nombres qu'on obtient au départ de 0 et itérant l'opération $+1$. L'ensemble des nombres naturels est noté $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}_0$ représente l'ensemble des naturels non nuls.

Voici une propriété importante des naturels :

Tout ensemble non vide de naturels contient un plus petit élément (1.1)

En effet supposons qu'un ensemble E de naturels contienne au moins un élément p_0. Si p_0 n'est pas le plus petit élément de E on peut trouver un naturel p_1 qui soit dans E et qui soit $< p_0$. Itérons ce processus : ou bien p_1 est le plus petit élément de E, ou bien on peut trouver un naturel $p_2 < p_1$ qui soit dans E. De la sorte ou bien on trouve le plus petit élément de E, ou bien on obtient des naturels $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que

$$p_n < p_{n-1} < \ldots p_2 < p_1 < p_0 \ .$$

Cette deuxième éventualité ne peut continuer indéfiniment : le nombre de naturels $< p_0$ est p_0, il est donc impossible qu'après p_0 itérations du processus ci-dessus on n'ait pas trouvé le plus petit élément de E. $\square$

Ce résultat est lié à la méthode usuelle de **raisonnement par récurrence** :

Considérons une proposition $\mathcal{P}(x)$. Supposons :
— la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée,
— pour tout naturel m, la proposition $\mathcal{P}(m)$ entraîne $\mathcal{P}(m+1)$.
Alors $\mathcal{P}(m)$ est vérifiée pour tout naturel m

En fait cela est une conséquence du résultat (1.1), en effet dans les conditions ci-dessus s'il existait un naturel p tel que $\mathcal{P}(p)$ soit faux, en considérant le plus petit de ces naturels, on obtiendrait un naturel $\neq 0$, qui serait donc de la forme $q+1$, mais alors $\mathcal{P}(q)$ devrait être vérifié et donc $\mathcal{P}(q+1)$ aussi, on obtiendrait ainsi une contradiction.

1.3 Nombres entiers, notion de groupe

Les **entiers** s'obtiennent en adjoignant aux naturels les nombres

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, -14, \ldots \ ;$$

l'ensemble des entiers est noté $\mathbb{Z}$. Les entiers s'obtiennent donc au départ de 0 en itérant les opérations $+1$ et -1.

Soient m, n, p des entiers quelconques. Alors $m + (n+p) = (m+n) + p$ et $m + 0 = m$. Dans les entiers on peut également effectuer des *soustractions* : effectuer la soustraction $m - n$ consiste à résoudre l'équation $x + n = m$ et cela marche puisque $(m + (-n)) + n = m$. Une telle situation est à la base de la notion de **groupe**. Considérons un ensemble G . Une **opération $\diamond$ interne et partout définie sur** G associe à tous x, y éléments de G un élément de G noté $x \diamond y$. Ainsi l'addition et la multiplication sont des opérations internes et partout définies à la fois sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Définition. *Soient un ensemble G, une opération $\diamond$ interne et partout définie sur G et n un élément fixé de G. On dit que $\diamond$ définit sur G un* ***groupe*** *de neutre n, ou encore que $< G, \diamond, n >$ est un groupe, lorsque :*

1. *$\diamond$ est associative sur G , c'est-à-dire $x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$ pour tous x,y,z $\in G$,*
2. *n est un neutre pour $\diamond$, c'est-à-dire $x \diamond n = n \diamond x = x$ pour tout $x \in G$,*
3. *pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x \diamond y = y \diamond x = n$.*

Si en plus $x \diamond y = y \diamond x$ pour tous $x, y \in G$, le groupe est dit commutatif.

Ainsi l'addition définit sur $\mathbb{Z}$ un groupe commutatif de neutre 0 mais ne définit pas un groupe sur $\mathbb{N}$. Evidemment la multiplication ne permet pas de définir un groupe sur les naturels ou les entiers et cela même si on enlève le nombre 0. Ce qu'on a remarqué à propos de la soustraction dans $\mathbb{Z}$ s'étend à tous les groupes, en effet :

Théorème 1. *Soit $< G, \diamond, n >$ un groupe. Pour tous a, b dans G, l'équation $a \diamond x = b$ a une et une seule solution.*

Démonstration. Soit $y \in G$ tel que $y \diamond a = a \diamond y = n$.

Existence : Posons $x = y \diamond b$. Alors $a \diamond x = a \diamond (y \diamond b) = (a \diamond y) \diamond b = n \diamond b = b$.

Unicité : Supposons $a \diamond u = b$. Alors

$$y \diamond b = y \diamond (a \diamond u) = (y \diamond a) \diamond u = n \diamond u = u ,$$

d'où $u = y \diamond b$ et un tel u est unique. □

En particulier pour tout x dans G, il existe un seul y tel que $x \diamond y = n$, ce y est appelé l'**inverse** de x. En nous référant à la preuve ci-dessus, nous voyons que

la solution de $a \diamond x = b$ est donnée par $x = c \diamond b$ où c est l'inverse de a.

1.4 Nombres rationnels, notion de corps commutatif

Les **rationnels** sont les fractions d'entiers (de dénominateur non nul). L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Dans les rationnels on va pouvoir effectuer non seulement les additions, soustractions et multiplications mais aussi les divisions par un nombre non nul. *On va ainsi pouvoir effectuer les quatre opérations élémentaires* Dans les rationnels, on est ainsi en présence de deux groupes commutatifs : munis de l'addition, les rationnels forment évidemment un groupe de neutre 0 et $\mathbb{Q}_0$, l'ensemble des rationnels non nuls, muni de la multiplication est aussi un groupe. Le concept de groupe ne considère qu'une seule opération, mais à la notion de nombre deux opérations sont inévitablement liées : l'addition et la multiplication. La notion de corps considère simultanément deux opérations et généralise ce qu'on observe à propos de l'addition et de la multiplication sur les nombres rationnels, l'idée de base est simple : la notion de **corps commutatif** formalise le fait de pouvoir effectuer les quatre opérations élémentaires. En voici la définition précise.

Définition. *Considérons sur un ensemble $\mathbb{K}$ deux opérations internes et partout définies notées $+$, $\cdot$; soient 0 et 1 deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Alors, on dit que $< \mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1 >$ est un* ***corps commutatif*** *lorsque*

1. *les opérations $+, \cdot$ sont associatives et commutatives,*
2. *0 et 1 sont des neutres respectivement pour $+$ et $\cdot$,*
3. *pour tout a dans $\mathbb{K}$, il existe x dans $\mathbb{K}$ tel que $a + x = 0$.*
4. *pour tout $a \neq 0$, il existe y dans $\mathbb{K}$ différent de 0 tel que $a \cdot y = 1$,*
5. *$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$ (règle de distributivité).*

Evidemment $< \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 >$ est un corps commutatif et $< \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 >$ ne l'est pas.

1.5 Calcul algébrique dans un corps commutatif

Plaçons-nous dans un corps commutatif $< \mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1 >$. Notons $\mathbb{K}_0$ l'ensemble de tous éléments de $\mathbb{K}$ non nuls. Envisageons les règles de base du calcul algébrique et voyons qu'elles sont vérifiées dans $\mathbb{K}$.

Soustraction

$< \mathbb{K}, +, 0 >$ est clairement un groupe commutatif, l'unique x tel que $a+x=0$ est noté $-a$. Ainsi, vu le théorème 1, *on peut soustraire : $a-b$ est la solution de $b+x=a$ et $a-b=a+(-b)$.*

Multiplication par 0 **:**

$a \cdot 0 = 0$ pour tout $a \in \mathbb{K}$.

En effet prenons un élément quelconque b dans $\mathbb{K}$, on a $a \cdot b = a \cdot (b+0) = a \cdot b + a \cdot 0$ d'où en ajoutant $-(a \cdot b)$ on obtient $0 = a \cdot 0$.

Produit nul :

$a \cdot b = 0$ entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.

En effet, supposons $a \cdot b = 0$ et $a \neq 0$ alors prenons u tel que $u \cdot a = 1$, nous avons $u \cdot (a \cdot b) = u \cdot 0 = 0$ d'où $0 = (u \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$. Ainsi *quand un produit est nul, un des facteurs est forcément nul.*

Division

Vu la propriété ci-dessus, la multiplication est interne dans $\mathbb{K}_0$. Il s'ensuit que $< \mathbb{K}_0, \cdot, 1 >$ est aussi un groupe commutatif et, si a est dans $\mathbb{K}_0$, l'unique y tel que $a \cdot y = 1$ est appelé l'*inverse* de a et est noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$. Appliquons de nouveau le théorème 1 : *on peut diviser par tout $b \neq 0$, ainsi l'unique solution y de $b \cdot y = a$ est notée a/b ou $\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.*

Dans un corps commutatif on ne peut diviser par 0, en effet diviser a par 0 consisterait à trouver une solution à l'équation $0 \cdot x = a$, c'est-à-dire à $0 = a$; si $a \neq 0$ cela est impossible et si $a = 0$ tout x est solution !

Réduction au même dénominateur : prouvons la règle usuelle

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot d) + (c \cdot b)}{b \cdot d} \qquad .$$

En effet

$$\begin{aligned}
(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \cdot (b \cdot d) &= (\frac{a}{b} \cdot (b \cdot d)) + (\frac{c}{d} \cdot (b \cdot d)) \\
&= ((\frac{a}{b} \cdot b) \cdot d) + ((\frac{c}{d} \cdot d) \cdot b) \\
&= (a \cdot d) + (c \cdot b) \,.
\end{aligned}$$

Exposants entiers

Soit n un naturel $\neq 0$ et a dans $\mathbb{K}$. On définit le *multiple* na en posant :

$$na := \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} \,.$$

On définit aussi les *puissances à exposant entier* en posant :

$$a^0 := 1 \quad , \quad a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \quad , \quad \text{et , si } a \neq 0 , \quad a^{-n} := (a^{-1})^n \quad .$$

Les règles usuelles des exposants sont vérifiées autrement dit

$$a^{p+q} = a^p \cdot a^q \qquad , \qquad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

étant entendu qu'en cas d'exposant négatif le nombre a ou b est $\neq 0$.

Produits remarquables

On vient de remarquer que des règles bien connues du calcul algébrique étaient vérifiées dans un corps commutatif quelconque, il en est de même pour d'autres règles usuelles faisant intervenir l'addition, la soustraction et la multiplication. Ainsi les formules souvent appelées "*produits remarquables*" sont vérifiées dans tout corps commutatif, par exemple dans tout corps commutatif on a

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \;\text{ et }\; a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)\ .$$

Binôme de Newton

Etant donnés $a_0, a_1, \ldots, a_m$ dans $\mathbb{K}$, on peut additionner ces nombres, on obtient ainsi un élément de $\mathbb{K}$ noté $\sum_{k=0}^{m} a_k$, plus généralement si $0 \le i \le j \le m$, on pose

$$\sum_{k=i}^{j} a_k := a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j\ .$$

Dans tout corps commutatif la **Formule du binôme de Newton** [1] est vérifiée :

$$\boxed{(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} \qquad (m \text{ naturel } \ge 1)}$$

cela se prouve par récurrence sur l'exposant m (voir par exemple [8]). Rappelons encore : pour tous naturels m, k tels que $k \le m$,

$$C_m^k = \binom{m}{k} := \frac{m!}{k!(m-k)!}\ .$$

La formule du binôme de Newton rend pour $n = 2$ et $n = 3$ les formules usuelles donnant $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$.

Certains corps commutatifs peuvent toutefois réserver des surprises. C'est le cas des entiers modulo p (c'est-à-dire $0, 1, \ldots, p-1$) qui, si p est un nombre premier, forment un corps commutatif, noté $\mathbb{Z}_p$ (voir par exemple [8]).

1.6 Droite cartésienne et nombres réels

Considérons une droite D, sur cette droite choisissons une origine notée O et un point U distinct de O, orientons la droite en choisissant comme sens de parcours le

1. en fait due à Pascal (1654), Newton étendit cette formule aux exposants fractionnaires (1665) au prix de l'introduction d'une série dont on parlera plus tard ...

sens allant de O vers U, prenons comme unité de mesure la longueur du segment OU, pour exprimer cela on dira que D est une **droite cartésienne**.

Tout entier se représente sur la droite cartésienne de façon évidente. On sait que le Théorème de Thalès permet de partager un segment donné en un nombre quelconque de parties égales. Dès lors on peut représenter tout rationnel sur la droite cartésienne.

On ne définit pas ici de façon formelle les nombres réels, simplement on identifie les réels aux points de la droite cartésienne, pour nous : **les nombres réels sont les points de la droite cartésienne.** On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les réels, c'est-à-dire la droite cartésienne.

Un réel u est inférieur à un réel v , en abrégé $u < v$, lorsque en suivant l'orientation de D le point u précède le point v ; un réel est dit *positif* lorsqu'il est ≥ 0 et il est dit *négatif* lorsqu'il est ≤ 0 . On désigne par $\mathbb{R}_0$ l'ensemble des réels non nuls et par $\mathbb{R}_0^+$ l'ensemble des réels > 0 . Les rationnels s'interprétant sur la droite cartésienne, on retrouve parmi les réels tous les rationnels.

Voici une propriété fondamentale de la droite :

> *quelque soit le point P choisi sur la droite cartésienne à la droite de O , on peut porter au départ de O un certain nombre de fois le segment de longueur unité de telle sorte à dépasser le point P .*

par conséquent *quel que soit le réel r il existe un naturel m tel que $r \leq m$.*

Si r est un réel positif, on peut donc considérer le plus petit naturel supérieur à r et donc, en retranchant 1 à cet entier, on trouve le plus grand entier inférieur ou égal à r . On peut faire de même pour tout réel négatif, d'où la définition :

Si r est un réel on appelle ***partie entière*** *de r, notée $[r]$ le plus grand entier $\leq r$.*

Par conséquent $[r] \leq r < [r] + 1$.

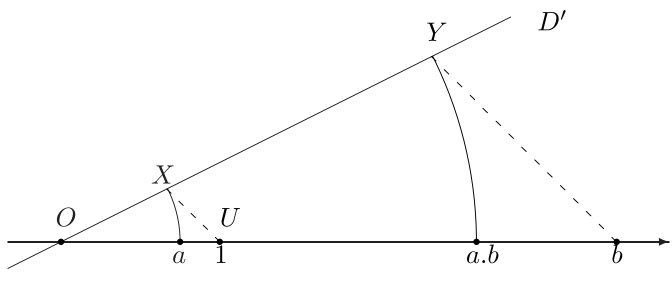


Figure 1.1: Multiplication des réels

L'addition et la multiplication des réels peuvent s'obtenir géométriquement en accord avec les résultats classiques de la géométrie plane. Cela est évident pour l'addition. Montrons comment multiplier deux réels $a, b > 0$ avec "la règle et le compas". Utilisons le Théorème de Thalès et référons-nous à la figure 1.1 , traçons une droite D' issue de O, sur cette droite on fixe X de telle sorte que la longueur de OX soit égale à la longueur de Oa, on obtient Y en menant par b la parallèle à UX , finalement on obtient $a \cdot b$ en reportant OY sur la droite cartésienne.

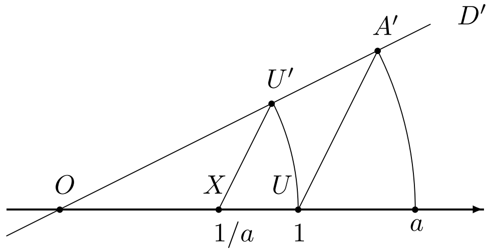


FIGURE 1.2: Inverse d'un réel

Théorème 2. $<\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1>$ *est un corps commutatif.*

Limitons-nous ici à montrer que tout réel a a un inverse, envisageons encore le cas où $a > 0$ et référons-nous à la figure 1.2 : menons par O une droite D' et sur cette droite à partir de O portons les longueurs 1 et a, on obtient ainsi les points U' et A' , par U' menons la parallèle à $A'U$, on obtient ainsi le point X sur la droite cartésienne, ce point X représente l'inverse de a .

1.7 Nombres irrationnels

Rappelons qu'un nombre naturel est *premier* lorsque qu'il est $\neq 1$ et que ses seuls diviseurs entiers sont 1 et lui-même. On sait : *si m est un nombre premier et si m est un diviseur entier de $p \cdot q$, alors m est un diviseur entier de p ou un diviseur entier de q .* Utilisons cela pour prouver le résultat suivant.

Théorème 3. *Si p est un nombre premier, il n'existe pas de rationnel dont le carré soit égal à p .*

Démonstration. Soit p premier. Raisonnons par l'absurde et supposons que p soit égal au carré d'une fraction de deux naturels. Si ces deux naturels ne sont pas premiers entre eux, effectuons toutes les simplifications possibles ; de la sorte, on obtient des naturels non nuls m, n premiers entre eux tels que $p = \frac{m^2}{n^2}$. Alors $p \cdot n^2 = m^2$. Le nombre p est donc un diviseur entier de m^2 , d'où le naturel p est un diviseur entier de m. Alors p^2 est un diviseur entier de $p \cdot n^2$; dès lors p est alors un diviseur de n^2 d'où aussi un diviseur entier de n. Par conséquent m et n ont p comme diviseur entier commun, ce qui contredit le fait que m et n soient premiers entre eux. On obtient ainsi une contradiction et notre supposition est fausse. □

Mais *pour tout réel $a \geq 0$ il existe un réel $x \geq 0$ tel que $a = x^2$.*

En effet, envisageons le cas $a > 1$ et considérons la figure 1.3 : construisons un triangle rectangle OPQ tel $|OQ|$ soit a ($|PQ|$ désigne la longueur du segment PQ),

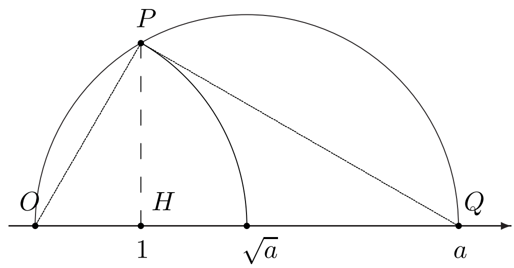


FIGURE 1.3: Recherche de la racine carrée

soit H le pied de la hauteur abaissée de P sur l'hypoténuse ; alors on sait

$$|OP|^2 = |OH| \cdot |OQ| = a \ ,$$

en reportant la longueur $|OP|$ sur la droite cartésienne à la droite de 0, on obtient un nombre x positif tel que $x^2 = a$. De plus un tel réel x est unique. Ce nombre x est appelée **la racine carrée** de a et est noté $\sqrt{a}$.

D'après le théorème 3, par exemple les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ sont des réels non rationnels. Un nombre réel qui n'est pas rationnel est appelé un **nombre irrationnel**. Le théorème 3 peut donc s'énoncer :

la racine carrée de tout nombre premier est un nombre irrationnel.

Evidemment toute somme, tout produit de rationnels est un rationnel. Mais bien entendu une somme et un produit d'irrationnels peuvent être rationnels, ainsi $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ et $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Il s'ensuit aussi que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel, que le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est un irrationnel.

Il est dès lors très facile d'obtenir de nouveaux exemples d'irrationnels, par exemple :

$$5\sqrt{2} \ , \ 5 - \sqrt{2} \ , \ \frac{1}{3\sqrt{5}} \ , \ \frac{2}{1+\sqrt{7}} \ .$$

Comme on va le voir rationnels et irrationnels sont donc enchevêtrés les uns dans les autres.

Proposition 4. *Entre deux réels distincts il y a toujours un rationnel et un irrationnel.*

En effet considérons deux réels a, b avec $a < b$.

1. Cherchons un irrationnel v tel que $a < v < b$. Prenons des réels a', b' tels que $a < a' < b' < b$. Si a' ou b' sont irrationnels on prend $v = a'$ ou $v = b'$. Envisageons le cas où a' et b' sont rationnels, alors il suffit de prendre

$$v := a' + \frac{b' - a'}{\sqrt{2}} \ .$$

2. Cherchons un rationnel w tel que $a < w < b$. Fixons un naturel m tel que $m > \frac{1}{b-a}$. Il s'ensuit $1 < m \cdot b - m \cdot a$, on peut donc trouver un naturel p tel que $m \cdot a < p < m \cdot b$ d'où

$$a < \frac{p}{m} < b \ .$$

1.8 Nombres complexes

En introduisant les complexes le but est triple :

1. étendre les réels,
2. manipuler les nouveaux nombres introduits au moyen des règles usuelles du calcul algébrique, autrement dit les nombres complexes devraient former un corps commutatif,
3. parmi les nouveaux nombres certains devraient être solution de $x^2 = -1$.

Convenons que les lettres a, b représentent des réels.

Considérons le plan muni de deux axes perpendiculaires avec la même unité de mesure sur les deux axes. Assimilons les **nombres complexes** aux points du plan, ainsi un nombre complexe z est un couple (a, b) de deux nombres réels, a étant l'abscisse et b l'ordonnée du point correspondant. Mais l'essentiel est évidemment de définir l'addition et la multiplication. Pour additionner les complexes $z_1 = (a_1, b_1)$ et $z_2 = (a_2, b_2)$ on va additionner les vecteurs $\overrightarrow{0z_1}$ et $\overrightarrow{0z_2}$, on va donc définir :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \ .$$

Mais c'est au niveau de la multiplication que réside la nouveauté, voici sa définition :

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \ .$$

L'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$ et lorsque le plan est assimilé comme ci-dessus aux nombres complexes le plan est appelé le **plan complexe**.

On peut vérifier :

$< \mathbb{C}, +, \cdot, (0,0), (1,0) >$ *est un corps commutatif.*

Montrons par exemple que tout complexe $(a, b) \neq (0, 0)$ a un inverse. Remarquons

$$(a, b) \cdot (\lambda a, -\lambda b) = (\lambda(a^2 + b^2), 0) \ ,$$

par conséquent, en prenant $\lambda := 1/(a^2 + b^2)$, on obtient $(a, b) \cdot (\lambda a, -\lambda b) = (1, 0)$. Souvent, comme pour les réels, le $\cdot$ du produit est omis et $z_1 \cdot z_2$ est simplement noté $z_1\, z_2$.

On veut que *les nombres complexes étendent les nombres réels*, en fait il s'agit d'interpréter les réels dans les complexes de telle sorte qu'effectuer des additions ou des multiplications sur des réels dans $\mathbb{R}$ ou les effectuer sur leurs représentants dans les complexes donnent les mêmes résultats. Il faut donc placer judicieusement la droite cartésienne dans le plan complexe ! Pour ce faire, on interprète chaque réel a par $(a, 0)$ en effet :

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0) \quad \text{et} \quad (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 \cdot a_2, 0) \ .$$

Dans le plan cartésien l'axe des abscisses est dès lors appelé l'**axe réel**.

Le nombre complexe i est défini comme étant le nombre complexe $(0,1)$. Il s'ensuit

$$\boxed{i^2 = -1}\ .$$

Les trois objectifs précisés plus haut sont donc atteints.

Remarquons :

$$a + i \cdot b = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$$

autrement dit

$$\boxed{(a,b) = a + b\,i}\ ,$$

on obtient ainsi la représentation habituelle des nombres complexes.

Les nombres complexes de la forme ib sont dits **imaginaires**. Cette appellation est due au fait que ces nombres introduits et utilisés dès le 16e siècle n'ont vu leur existence prouvée que fin du 18e, début du 19e siècle et ont dès lors été longtemps qualifiés d'imaginaires (il fallut attendre Argand et Gauss pour asseoir l'existence des complexes). L'axe des ordonnées est dès lors appelé l'**axe imaginaire**. Pour un nombre complexe $z = a + ib$, on ne parle dès lors plus d'abscisse et d'ordonnée mais bien de partie réelle et de partie imaginaire, à savoir $\mathrm{Re}\, z := a$ et $\mathrm{Im}\, z := b$. On n'en dira pas plus ici à propos des complexes (pour une étude plus détaillée consulter par exemple [8] où on peut trouver une présentation plus géométrique de la multiplication des complexes)

1.9 Comparer des nombres

Jusqu'ici on a abordé la notion de nombre uniquement par le biais des opérations sur ces nombres. Cela nous a permis d'introduire la notion de corps commutatif. Mais les nombres sont aussi utilisés à d'autres fins, ainsi on est souvent amené à comparer des mesures de grandeurs physiques, on est alors conduit à *comparer* des nombres. Abordons cet aspect. Nous l'avons déjà fait pour les réels. Mais, par exemple on pourrait se poser la question de savoir si on peut comparer entre eux des nombres complexes. Aussi on va généraliser ce qu'on observe sur les réels et enrichir la notion de corps commutatif en introduisant la notion de corps ordonné. Auparavant précisons d'abord ce qu'est une relation d'ordre.

Par relation sur un ensemble A on entend une proposition $R(x,y)$ telle que pour tous x, y dans A la proposition $R(x,y)$ est soit vraie, soit fausse. La relation $R(x,y)$ définit un **ordre total** sur A lorsque, pour tous x, y, z dans A,

— $R(x,x)$ est vraie,
— ($R(x,y)$ et $R(y,z)$) entraîne $R(x,z)$,
— ($R(x,y)$ et $R(y,x)$) entraîne $x = y$,
— pour tous x, y se trouvant dans A, on a $R(x,y)$ ou $R(y,x)$.

$R(x,y)$ signifie alors que x est "inférieur ou égal" à y pour l'ordre considéré. Aussi plutôt que de représenter une relation d'ordre par $R(x,y)$ on utilisera la notation $\preceq$; si $u \preceq v$ et $u \neq v$, on écrit $u \prec v$ ou encore $v \succ u$.

Il est clair que $\leq$ définit un ordre total sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Sur les nombres complexes on pourrait par exemple définir une relation d'ordre comme suit :

$$a + ib \;\preceq\; a' + ib' \text{ ssi } a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b < b')\,. \tag{1.2}$$

Il s'agit bien d'un ordre total sur $\mathbb{C}$.

Mais sur des nombres il ne suffit pas d'avoir un ordre , il faut aussi que cet ordre se comporte "bien" par rapport à l'addition et la multiplication, c'est-à-dire comme $\leq$ le fait dans $\mathbb{R}$, c'est cela qu'on va exprimer dans la définition d'un corps ordonné.

Définition (Corps ordonné)**.**
$< \mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1, \preceq >$ *est un* ***corps ordonné*** *lorsque*

1. $< \mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1 >$ *est un corps commutatif,*
2. $\preceq$ *définit un ordre total sur* $\mathbb{K}$ *,*
3. *pour tous* x*,* y*,* z *dans* $\mathbb{K}$*,*
   $x \preceq y$ *implique* $x + z \preceq y + z$ *,*
   $0 \preceq z$ *et* $x \preceq y$ *impliquent* $x \cdot z \preceq y \cdot z$ *.*

Bien entendu le corps des rationnels et le corps des réels munis de l'ordre $\leq$ habituel sont des corps ordonnés.

Plaçons-nous dans un corps ordonné $\mathbb{K}$. Un élément u de $\mathbb{K}$ est dit positif si $0 \preceq u$, négatif si $u \preceq 0$. Les règles habituelles que nous connaissons à propos des réels, sont également vérifiées, ainsi on obtient successivement :

1. $x \prec y$ ssi $0 \prec y - x$.
2. $x \prec y$ ssi $-y \prec -x$, en particulier $0 \preceq x$ ssi $-x \preceq 0$.
3. ($z \preceq 0$ et $x \preceq y$) entraîne $y \cdot z \preceq x \cdot z$.
   En effet, si $z \preceq 0$ et $x \preceq y$, on a $0 \preceq -z$ d'où $x \cdot (-z) \preceq y \cdot (-z)$, c'est-à-dire $-(x \cdot z) \preceq -(y \cdot z)$ et donc $y \cdot z \preceq x \cdot z$.
4. $0 \prec 1$.
   En effet supposons $1 \prec 0$, alors en multipliant par 1 on aurait $1 \succ 0$, ce qui est impossible, par conséquent $1 \not\prec 0$ d'où $0 \prec 1$.
5. $0 \preceq x \cdot y$ si et seulement si x, y sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.

Un corps commutatif n'est pas nécessairement un corps ordonné, ainsi :

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ *qui fasse du corps des complexes un corps ordonné.*

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $< \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \preceq >$ soit un corps ordonné. Alors deux cas se présentent : $i \preceq 0$ et $0 \preceq i$, dans chacun de ces cas multiplions cette inégalité par i :
— si $i \preceq 0$, alors $0 \cdot i \preceq i^2$ d'où $0 \preceq -1$,
— si $0 \preceq i$, alors $0 \cdot i \preceq i^2$ d'où $0 \preceq -1$.
On a donc $0 \preceq -1$ et donc $1 \preceq 0$, ce qui est impossible puisque $0 \prec 1$.

Ainsi, pratiquement, *on ne peut comparer des nombres complexes entre eux.*

Dans tout corps ordonné, on définit le **module** d'un nombre u comme on le faisait dans $\mathbb{R}$:

$$|u| := \begin{cases} u & \text{si } 0 \preceq u \ , \\ -u & \text{si } u \prec 0 \ . \end{cases}$$

Pour tous u, v dans $\mathbb{K}$ on a

$$|u \cdot v| = |u| \cdot |v| \ .$$

Si u et v sont de même signe on a $|u+v| = |u| + |v|$; si u, v sont de signe opposé et si par exemple $|u| \preceq |v|$, on a $|u+v| \preceq |v|$; de toute façon on a

$$|u+v| \preceq |u| + |v| \ .$$

En itérant l'addition on obtient :

$$\boxed{|\sum_{k=0}^{m} u_k| \preceq \sum_{k=0}^{m} |u_k| \ .}$$

Pour compléter les propriétés du module remarquons encore

$$\boxed{|u| \prec v \text{ ssi } -v \prec u \prec v} \ .$$

1.10 Ensembles finis, ensembles infinis

Soit n un nombre naturel. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ représente la liste formée par ces nombres écrits dans l'ordre indiqué, la longueur cette liste est n . La notion de **liste** tient compte de la nature des nombres présents mais aussi de leur ordre, une liste de nombres de longueur n comporte n places, chacune occupée par un nombre, des places distinctes peuvent être occupées par le même nombre. En général, deux listes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ sont égales lorsqu'elles ont la même longueur $(m = n)$ et lorsque $a_i = b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Une liste de longueur 2 (c'est-à-dire (a, b)) s'appelle un couple.

La première utilité des nombres naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$ est de nous permettre de *compter*. Si on parvient à passer en revue tous les objets soumis au comptage, on dit que ces objets forment un ensemble fini. Précisons cela.

Envisageons un exemple : l'ensemble des diviseurs entiers de 24 est fini car on peut compter les diviseurs entiers de 24, on procède par exemple comme suit :

diviseurs entiers de 24	1	2	3	4	6	8	12	24
numéros correspondant	0	1	2	3	4	5	6	7

ainsi pour compter ces diviseurs entiers on a utilisé tous les naturels ≤ 7. Le cas général est semblable :

Définition (Ensembles finis)**.**
Un ensemble non vide E est ***fini*** *lorsqu'on peut compter les éléments de cet ensemble*

au moyen de tous les naturels inférieurs ou égaux à un naturel m*, c'est-à-dire lorsqu'on peut associer à tout naturel parmi* $0, 1, \ldots, m$ *un et un seul élément de* E *de telle sorte qu'on passe ainsi en revue tous les éléments de* E *une et une seule fois ; on dit alors que* $m+1$ *est le* ***nombre d'éléments*** *de* E *. De plus on dit que l'ensemble vide est fini et son nombre d'éléments est* 0 *. Un ensemble qui n'est pas fini est dit* ***infini***

Ainsi un ensemble fini dont le nombre d'éléments est $m+1$ peut donc être énuméré sous la forme $a_0, a_1, \ldots, a_m$ de telle sorte que $a_j \neq a_k$ si $j \neq k$.

On prouve que *toute partie d'un ensemble fini est finie, que l'union de deux ensembles finis est finie et, plus généralement, si* p *est un naturel, que l'union de* p *ensembles finis est finie.*

1.11 Le plus grand, le plus petit ...

Plaçons-nous encore dans un corps ordonné quelconque $\mathbb{K}$ muni d'un ordre $\preceq$.

Définition. *Soient* A *une partie de* $\mathbb{K}$ *et* b *un élément de* $\mathbb{K}$*.*

— b *est un* ***majorant*** *(resp.* ***minorant****) de* A *lorsque* $x \preceq b$ *(resp.* $b \preceq x$ *) pour tout* $x \in A$*.*

— b *est* ***le plus grand élément*** *(resp.* ***le plus petit élément****) de* A *lorsque lorsque* b *est un élément de* A *qui est majorant (resp. minorant) de* A*. Le plus grand élément (resp. le plus petit élément) de* A *est aussi appelé le* ***maximum*** *(resp.* ***minimum****) de* A *. S'il existe le plus grand (resp. le plus petit) élément d'un ensemble* A *est unique, on le note alors* $\max A$ *(resp.* $\min A$ *).*

— A *est* ***borné supérieurement*** *(resp.* ***inférieurement****) dans* $\mathbb{K}$ *lorsqu'il existe dans* $\mathbb{K}$ *un majorant (resp. minorant) de* A*.*
A est ***borné*** *dans* $\mathbb{K}$ *lorsqu'il est à la fois borné supérieurement et inférieurement dans* $\mathbb{K}$*.*

En procédant par récurrence, on montre que tout ensemble fini non vide de $\mathbb{K}$ ayant $m+1$ éléments peut être énuméré sous la forme

$$u_0 \prec u_1 \prec \ldots \prec u_m ,$$

il est clair qu'un tel ensemble a un plus petit élément (à savoir u_0) et un plus grand élément (à savoir u_m), d'où

Théorème 5. *Toute partie finie et non vide d'un corps ordonné a un plus grand élément et un plus petit élément.*

Ce résultat permet de prouver que de nombreux ensembles sont infinis. Par exemple, plaçons-nous dans $\mathbb{R}$ et désignons par a, b des réels tels que $a < b$. Puisque entre deux réels distincts on peut toujours trouver un rationnel et un irrationnel, il ne peut y avoir entre a et b de plus grand rationnel, ni de plus grand irrationnel $< b$, par conséquent :

entre deux réels distincts il y a une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

Ainsi *il existe de nombreux ensembles bornés supérieurement n'ayant pas de plus grand élément, de nombreux ensembles bornés inférieurement n'ayant pas de plus petit élément.*

En voici un autre exemple : l'ensemble

$$J = \{\frac{1}{m} \; : \; m \text{ naturel non nul}\}$$

est borné, il a comme plus grand élément le nombre 1 mais il n'a pas de plus petit élément. En effet si $1/k$ était le plus petit élément de cet ensemble, $1/k+1$ serait un élément de l'ensemble considéré $<$ au plus petit élément ! L'ensemble J est donc infini.

1.12 Complétude des réels

Revenons encore aux nombres réels.

Précisons les notations utilisées pour représenter les **intervalles** de $\mathbb{R}$. Soient a, b des réels et $a < b$, alors

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } a \le x \le b\} \,, & [a,+\infty[&:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } a \le x\} \,, \\
[a,b[&:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } a \le x < b\} \,, &]a,+\infty[&:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x\} \,, \\
]a,b] &:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x \le b\} \,, &]-\infty,b] &:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } x \le b\} \,, \\
]a,b[&:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x < b\} \,, &]-\infty,b[&:= \{x \; : \; x \in \mathbb{R} \text{ et } x < b\} \,,
\end{aligned}$$

et on note aussi $]-\infty,+\infty[:= \mathbb{R}$. Ces ensembles sont les intervalles de $\mathbb{R}$. Les intervalles de la forme $]a,b[$,$]a,+\infty[$,$]-\infty,b[$ et $]-\infty,+\infty[$ sont dits des **intervalles ouverts** tandis que les intervalles de la forme $[a,b]$,$[a,+\infty[$,$]-\infty,b]$ et $]-\infty,+\infty[$ sont dits des **intervalles fermés** ;

L'**intérieur** d'un intervalle I est l'intervalle obtenu en enlevant de l'intervalle donné ses extrémités éventuelles, par exemple l'intérieur de $]a,b]$ est $]a,b[$.

L'intervalle $]a,b[$ n'ayant pas de maximum est donc infini, il s'ensuit que

tous les intervalles sont des ensembles infinis.

Des ensembles de nombres réels bien que bornés peuvent ne pas avoir de maximum ou de minimum, par exemple l'intervalle $]a,b[$ est borné et n'a ni minimum, ni maximum. Dans ce cas, on remarque que a est un minorant bien particulier et que b est un majorant aussi particulier : a est le plus grand minorant et b est le plus petit majorant. Pour représenter des situations de ce type on introduit la notion de borne inférieure et de borne supérieure : *si A est un ensemble de réels, s'il existe, le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de A s'appelle* ***borne supérieure*** *(resp.* ***borne inférieure****) de A.* S'il existe, le maximum (resp. minimum) d'un ensemble A est forcément la borne supérieure (resp. borne inférieure) de A, mais comme on le remarque par exemple avec $]a,b[$, la réciproque n'est pas vraie.

On admettra la propriété fondamentale suivante des nombres réels :

Théorème 6 (Complétude des réels)**.**
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée supérieurement, respectivement bornée inférieurement, a dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure, respectivement une borne inférieure.

Ce résultat n'a rien d'anodin, il est une des propriétés caractéristiques des nombres réels. Ainsi on ne dispose pas d'un tel résultat pour les rationnels comme le montre l'exemple suivant : l'ensemble

$$E := \{x \ : \ x \in \mathbb{Q} \text{ et } x^2 < 2\} \ ,$$

est une partie de $\mathbb{Q}$ bornée supérieurement dans $\mathbb{Q}$ et pourtant n'admet pas dans $\mathbb{Q}$ de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. En effet, supposons que b soit cette borne supérieure, alors $b \neq \sqrt{2}$ et il existerait donc un rationnel q compris strictement entre b et $\sqrt{2}$. Deux cas se présentent :

— $b < \sqrt{2}$, alors $q < \sqrt{2}$ d'où $q^2 < 2$ et q serait un élément de E supérieur b, ce qui est impossible ;

— $b > \sqrt{2}$, alors $\sqrt{2} < q < b$ et q serait un majorant de E dans $\mathbb{Q}$ qui serait inférieur à b ce qui est également impossible.

L'ensemble E ne peut donc admettre de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Mais bien entendu $\sqrt{2}$ est la borne supérieure de E dans $\mathbb{R}$.

1.13 Exercices

1. Avec la règle et le compas construisez sur la droite cartésienne les nombres

$$\frac{5}{7} \ , \ \sqrt{3} \ , \ \frac{5}{7} + \sqrt{3} \ , \ \frac{5}{7}\sqrt{3} \ , \ 1/\sqrt{3} \ .$$

2. Les ensembles suivants sont-ils finis, infinis ? Pourquoi ?
   1. $[1, 17]$,
   2. $\{x : \ x \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq x \leq 17\}$,
   3. $\{x : \ x \text{ irrationnel } \text{ et } 1 \leq x \leq 17\}$,
   4. $\{x : \ x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq \sqrt{127}\}$,
   5. $\{x : \ x \in \mathbb{Z} \text{ et } x \leq 9/2\}$,
   6. $\{x : \ x \in \mathbb{Q} \text{ et } 1 \leq x < 9\}$,
   7. $\{x : \ x \in \mathbb{Q} \text{ et } \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}\}$,
   8. $\{m/n : \ m, \, n \in \mathbb{N} \text{ et } n \neq 0 \text{ et } m, \, n \leq 10\}$,
   9. $\{x : \ \sin x = 0\}$,
   10. $\{x : \ \cos x = 0 \text{ et } -20 < x < 20\}$,
   11. $\{x : \ x \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ diviseur de } m\}$,
   12. $\{x : \ x \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ multiple de } m\}$,

   Ci-dessus m est un naturel.

Chapitre 2

Les nombres hyperréels

On va ici considérer de nouveaux nombres qui vont étendre les nombres réels. Parmi ces nombres on trouvera des infiniment petits et des infiniment grands.

La notion d'infiniment petit remonte à la fin du 17^e siècle et elle fut alors introduite explicitement par G.W. Leibniz dans la seconde moitié du 17^e siècle, mais elle était utilisée dès la première moitié de ce siècle par Fermat pour la recherche des extrema et des tangentes. Pour Leibniz, un infiniment petit est une quantité "idéale" dont le module est inférieur à toute quantité concrète [1]. Tant que l'on se limite aux nombres réels et qu'on interprète "nombre concret" par nombre réel> 0, il est clair que le seul infiniment petit est 0, en effet si r était un réel infiniment petit non nul, on devrait notamment avoir

$$|r| < \frac{|r|}{2} \text{ et donc } 1 < \frac{1}{2}\ !$$

Mais précisément, dès la seconde moitié du 17^e, pour développer la Physique, en particulier la cinématique, les savants de l'époque ont besoin de considérer des variations infinitésimales, notamment des variations infinitésimales du temps, et ces variations doivent évidemment être non nulles. Pour considérer de telles grandeurs il faut donc de nouveaux nombres. Bien que ne pouvant préciser la nature des quantités infiniment petites, les savants des 17^e et 18^e siècles (Leibniz, les Bernoulli, Euler...) ont utilisé de telles quantités, cela ne fut pas sans poser de nombreux problèmes, sans engendrer de nombreuses discussions, mais les développements fulgurants que connurent alors les Mathématiques et la Physique montrèrent à quel point l'utilisation de telles quantités était utile et fructueuse.

Le peu de clarté concernant la nature et l'existence d'infinitésimaux non nuls poussa les mathématiciens à se détourner progressivement de l'utilisation de nombres infinitésimaux et à fonder l'Analyse mathématique sur d'autres bases. Ainsi Lagrange dès la fin du 18^e siècle essaie de fonder l'Analyse sur base des développements en séries mais cela s'avère vain. Au 18^e siècle, d'Alembert introduit déjà la notion de limite sans avoir recours aux infiniment petits et au début du 18^e siècle, Cauchy précise et développe cette notion et la prend comme base de l'Analyse. Cette évolution est ensuite complétée et parachevée pour aboutir à la présentation "moderne"

1. forcément > 0 pour Leibniz

donnée par Weierstrass dans son Cours d'Analyse (1870). Cette histoire est très riche et passionnante (on peut la suivre dans divers ouvrages, par exemple dans [5], [7] ou encore dans le chapitre 10 de [18]).

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. En effet, en 1960, A. Robinson construit une extension des réels dans laquelle il existe des infiniment petits non nuls et qui permet de développer l'Analyse en suivant les méthodes infinitésimales ! Voilà qui remet à l'honneur les arguments et présentations de Leibniz et de ses successeurs. L'Analyse qu'on développe de la sorte est appelée l'Analyse non standard. C'est la voie qui a été ici choisie.

L'histoire des infiniment petits doit aussi nous rappeler une autre extension des réels : les nombres complexes. Là aussi il s'agissait d'ajouter aux réels d'autres nombres, là aussi il a fallu longtemps (fin du 18^e siècle) pour que les nombres complexes (introduits dès le 16^e siècle) soient admis par toute la communauté des mathématiciens.

Les nombres qui composent l'extension trouvée et exhibée par A. Robinson s'appellent les nombres **hyperréels**. Le cahier des charges que ces nombres doivent respecter est le suivant :

1. les nombres hyperréels doivent se manipuler en appliquant les règles usuelles du calcul algébrique, on veut aussi pouvoir comparer ces nombres, par conséquent les nombres hyperréels doivent former un corps ordonné ;
2. parmi les nombres hyperréels on doit retrouver les réels ;
3. parmi les nombres hyperréels il doit exister des infiniment petits non nuls.

Il n'est pas nécessaire de connaître comment ces nombres sont obtenus pour pouvoir les utiliser [2]. Aussi nous prenons le parti d'admettre que nous avons une extension des réels vérifiant des conditions proches de celles mentionnées ci-dessus ; nous allons étudier ces nombres, en déduire des règles et nous pourrons ainsi notamment prouver que ces nombres satisfont le cahier des charges précisé ci-dessus. De façon précise

supposons qu'on dispose d'un corps ordonné qui est une extension du corps ordonné des réels et qui contient un élément qui n'est pas un réel ; ce corps est dorénavant fixé, il est noté $^*\mathbb{R}$ et ses éléments sont appelés les nombres hyperréels.

Précisons ce qu'on entend ci-dessus par "extension du corps ordonné des réels" :

1. $\mathbb{R}$ est une partie de $^*\mathbb{R}$ autrement dit tous les réels sont des hyperréels,
2. l'addition, la multiplication de nombres réels considérés dans le corps des hyperréels donnent le même résultat que dans le corps des réels, ainsi dans $^*\mathbb{R}$ on a encore $3 + 2 = 5$ et $3 \cdot 2 = 6$,
3. un réel est inférieur à autre réel pour l'ordre des hyperréels si et seulement si il en est ainsi pour l'ordre des réels, ainsi dans $^*\mathbb{R}$ on a encore $2 < \sqrt{7}$.

2. ceux qui veulent en savoir plus sur l'existence des nombres hyperréels, trouveront la construction de ces nombres dans [9], [11], [13] ou encore dans l'annexe de [16].

Forcément 0, 1 sont aussi les neutres de l'addition, respectivement de la multiplication dans le corps des hyperréels. Dans ces conditions il n'y a aucun inconvénient à noter l'addition et la multiplication du corps $^*\mathbb{R}$, comme on le faisait déjà dans $\mathbb{R}$.

En plus

on suppose que le corps des nombres hyperréels satisfait aussi le Principe de transfert.

Mais de cela on en reparlera au chapitre 4, nous verrons alors ce que dit et ce que permet de faire le Principe de transfert.

Dorénavant *par '**nombre**' on entend '**hyperréel**'.* Etudions maintenant ces nombres.

2.1 Infiniment petits, infiniment grands, limités, appréciables

Pour Leibniz, à la fin du 17^e siècle, les infiniment petits sont des quantités *"idéales"* inférieures à toute "quantité assignable" non nulle. Suivons cette idée en traduisant "quantité assignable" par réel > 0, nous obtenons ainsi une définition précise des infiniment petits dans le cadre des nombres hyperréels :

Définition. *Un hyperréel u est **infiniment petit** (ou **infinitésimal**) (en abrégé **ip** ou **IP**) lorsque $|u| < r$ pour tout réel $r > 0$.*

Comme on l'a déjà dit

le seul réel qui soit un infiniment petit est 0,

en effet s'il existait un réel u non nul qui soit un infiniment petit on aurait $|u| < \frac{|u|}{2}$ et donc $1 < \frac{1}{2}$!

Pour l'instant on ne peut prouver qu'il existe des infiniment petits non nuls. Ne nous préoccupons pas maintenant de leur existence, étudions nos nouveaux nombres, familiarisons-nous avec eux. Le moment venu, on obtiendra de façon presque évidente qu'il existe des infiniment petits non nuls.

Remarquons que si x est un infiniment petit non nul, alors $-x$ est aussi un infiniment petit. D'où *s'il existe au moins un infiniment petit non nul, il existe alors un infiniment petit > 0 et un infiniment petit < 0 .*

Supposons que ε soit un infiniment petit > 0 . Remarquons que dans $^*\mathbb{R}$, comme dans tout corps commutatif, on peut diviser par tout nombre $\neq 0$ et en particulier *on peut diviser par un infiniment petit non nul.* Posons $H := \frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout réel $r > 0$, on a $\frac{1}{H} = \varepsilon < \frac{1}{r}$ d'où $H > r$; il existerait alors des hyperréels supérieurs à tous les réels. En prenant $G := -H$ on obtiendrait aussi un hyperréel G inférieur à tous les réels mais dont le module serait supérieur à tous les réels. D'où :

Définition. *Un hyperréel u est **infiniment grand** (en abrégé **ig** ou **IG**) lorsque $|u| > r$ pour tout réel $r > 0$.*

Parmi les infiniment grands, on distingue ceux qui sont positifs et donc supérieurs à tout réel, et ceux qui sont négatifs et qui sont donc inférieurs à tous les réels.

Définition. *Un hyperréel u est* ***limité*** *(en abrégé* ***lim*** *ou* ***LIM****) lorsque u n'est pas un infiniment grand, autrement dit un hyperréel u est limité si et seulement s'il existe un réel r positif tel que $|u| \leq r$.*

Evidemment tout infiniment petit est limité, de même tout réel est limité. Parmi les limités, on distingue deux types de nombres : les infiniment petits et les limités non infiniment petits, d'où la quatrième catégorie de nombres :

Définition. *Un hyperréel est* ***appréciable*** *(en abrégé* ***ap*** *ou* ***AP****) lorsqu'il est limité et non infiniment petit.*

Voyons maintenant comment ces divers nombres se positionnent les uns par rapport aux autres. Les définitions ci-dessus classifient les nombres hyperréels suivant leur module, dès lors un nombre est infiniment petit, infiniment grand, limité, appréciable si et seulement si son module est respectivement infiniment petit, infiniment grand, limité, appréciable. Il en est donc de même pour l'opposé d'un nombre hyperréel. Les divers nombres se distribuent donc de façon symétrique par rapport à 0. Ainsi

x	IP	AP	LIM	IG
$-x$	IP	AP	LIM	IG
$\lvert x\rvert$	IP	AP	LIM	IG

De plus :

1. *Tout nombre compris entre deux infiniment petits est un infiniment petit.*
2. *Tout nombre compris entre deux hyperréels limités est limité.*
3. *Tout nombre limité est inférieur à tout infiniment grand > 0 et supérieur à tout infiniment grand < 0.*
4. *Tout nombre supérieur à un infiniment grand > 0 est un infiniment grand > 0.*
5. *Tout nombre inférieur à un infiniment grand < 0 est un infiniment grand < 0.*
6. *Un nombre compris entre deux appréciables de même signe, est aussi appréciable.*

Ces propriétés sont très simples à prouver, démontrons les trois premières.
1. Soient ε_1 et ε_2 des ip tels que $\varepsilon_1 < u < \varepsilon_2$. Alors si r est un réel > 0, $|\varepsilon_1|$ et $|\varepsilon_2|$ sont $< r$, il s'ensuit $-r < \varepsilon_1 < u < \varepsilon_2 < r$ d'où $|u| < r$.
2. Soient u, v des limités et x tel que $u < x < v$. Il existe des réels r_1, r_2 tels que $|u| < r_1$ et $|v| < r_2$; alors $-r_1 < u \leq x \leq v < r_2$ d'où $|x|$ est inférieur au maximum de r_1 et de r_2 et est donc limité.
3. Soient u limité et G, H ig respectivement > 0, < 0. Alors il existe un réel r tel que $-r \leq u \leq r$; puisque $r < G$ et $H < -r$, on a $H < u < G$.

Au vu de ce qu'on vient de voir, on pourrait représenter les nombres hyperréels comme sur la figure 2.1 ; mais une telle représentation n'est pas satisfaisante, en

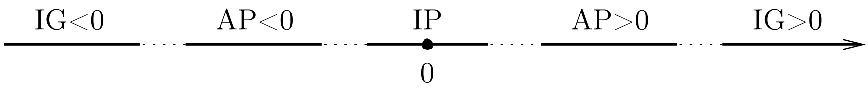


FIGURE 2.1: Une première représentation des hyperréels

effet elle pourrait nous inciter à croire qu'on peut assimiler les hyperréels aux points d'une droite, il n'en est rien car les hyperréels étendent strictement les réels que nous assimilons aux points de la droite cartésienne.

2.2 Opérations sur les nombres hyperréels

Plus haut on a vu que l'inverse d'un ip non nul était forcément ig. Réciproquement supposons que H soit ig, alors pour tout réel $r > 0$, on a $|H| > \frac{1}{r}$ et donc $|\frac{1}{H}| < r$, le nombre $\frac{1}{H}$ est donc ip. *L'inverse d'un infiniment grand est donc un infiniment petit.* Dès lors forcément *l'inverse d'un appréciable est aussi un appréciable.* Remarquons que nous ne pouvons pas dire ce qu'est l'inverse d'un limité si on ne sait pas si ce limité est infiniment petit ou appréciable, ce cas constitue donc un *cas d'indétermination* (représenté par ?). Résumons cela dans le tableau suivant :

INVERSE				
u	IP $\neq 0$	AP	LIM $\neq 0$	IG
$1/u$	IG	AP	**?**	IP

Envisageons maintenant la somme de deux nombres.

Théorème 7.

1. *La somme de deux infiniment petits est un infiniment petit.*
2. *La somme de deux limités est un limité.*
3. *La somme d'un infiniment petit et d'un appréciable est appréciable.*
4. *La somme d'un limité et d'un infiniment grand est un infiniment grand.*

Démonstration.
1. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ip et r un réel > 0 quelconque. Alors $|\varepsilon_1| < \frac{r}{2}$ et $|\varepsilon_2| < \frac{r}{2}$, d'où

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\,.$$

2. Soient u et v limités. Il existe des réels r et r' tels que $|u| \leq r$ et $|v| \leq r'$, d'où

$$|u + v| \leq |u| + |v| \leq r + r'\,.$$

3. Soient ε ip et u ap. Le nombre $u + \varepsilon$ est donc limité. Puisque $u = (u + \varepsilon) + (-\varepsilon)$, le nombre $u + \varepsilon$ ne peut être ip, il est donc ap.
4. Soient u limité, H ig. On a $H = (H + u) + (-u)$, dès lors $H + u$ ne peut être limité, il est donc ig. □

Montrons que "*tout peut arriver*" lorsqu'on additionne deux infiniment grands. Supposons que H est un infiniment grand, alors considérons les trois sommes suivantes qui se présentent chaque fois comme une somme de deux infiniment grands :

$$\begin{aligned} H + (-H) = 0 &= \text{IP} \\ (H+1) + (-H) = 1 &= \text{AP} \\ (H+H) + (-H) = H &= \text{IG} \end{aligned}$$

Toutes les réponses sont donc possibles, la somme de deux infiniment grands constitue donc un cas d'indétermination. Ces résultats sont résumés ci-dessous (les cases en gras indiquant les résultats "clé") :

SOMME				
	IP	AP	LIM	IG
IP	**IP**			
AP	**AP**	LIM		
LIM	LIM	LIM	**LIM**	
IG	IG	IG	**IG**	**?**

Bien entendu il n'y a pas d'indétermination lorsqu'on ajoute des infiniment grands de même signe : *la somme de deux infiniment grands positifs (resp. négatifs) est un infiniment grand positif (resp. négatif).*

Puisque $u - v = u + (-v)$, de là on déduit immédiatement les règles concernant la soustraction.

Envisageons maintenant le produit de deux hyperréels.

Théorème 8.

1. *Le produit de deux limités est limité.*
2. *Le produit d'un infiniment petit et d'un limité est un infiniment petit.*
3. *Le produit d'un infiniment grand et d'un appréciable est un infiniment grand.*
4. *Le produit de deux appréciables est un appréciable.*
5. *Le produit de deux infiniment grands est un infiniment grand.*

Démonstration. Prouvons les quatre premiers points.
1. Soient u, v limités. Il existe des réels r_1,r_2 tels que $|u| \leq r_1$ et $|v| \leq r_2$; il s'ensuit $|u \cdot v| \leq r_1 r_2$ d'où $u \cdot v$ est limité.
2. Soient ε ip, u limité et r un réel > 0 quelconque. Il existe un réel $r_1 > 0$ tel que $|u| < r_1$. Il s'ensuit

$$|\varepsilon \cdot u| = |\varepsilon| \cdot |u| < \frac{r}{r_1} \cdot r_1 = r \, .$$

3&4. Soient H ig et u, v des ap. On a

$$H = (H \cdot u) \cdot \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad v = (v \cdot u) \cdot \frac{1}{u} \, .$$

On sait que $1/u$ est ap d'où limité. Dès lors $H \cdot u$ ne peut être limité et est donc ig, le produit $v \cdot u$ ne peut être ip et est ap. □

Comme on va le voir il n'y pas de règle générale concernant le produit d'un infiniment petit et d'un infiniment grand, c'est un cas d'indétermination. Soit ε in infiniment petit non nul, alors voici trois produits d'un IP et d'un IG :

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1 &\quad = \quad \text{AP} \\ \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon &\quad = \quad \text{IP} \\ \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} &\quad = \quad \text{IG} \end{aligned}$$

Ainsi "*tout peut arriver*" lorsqu'on multiplie un infiniment petit avec un infiniment grand ! Puisque IP · IG est un cas particulier de LIM · IG, le produit d'un limité et d'un infiniment grand est aussi un cas d'indétermination. Voici résumées les règles concernant le produit (en gras les positions "clé").

PRODUIT				
	IP	AP	LIM	IG
IP	IP			
AP	IP	**AP**		
LIM	**IP**	LIM	**LIM**	
IG	**?**	**IG**	**?**	**IG**

Ci-dessus nous n'avons pas envisagé le cas de la division, mais une division est un produit puisque $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$; les règles concernant la division s'obtiennent donc en appliquant les règles du produit et de l'inverse. La division donne donc lieu à deux cas d'indétermination de base :

$$\frac{\text{IP}}{\text{IP}} = ? \qquad , \qquad \frac{\text{IG}}{\text{IG}} = ?\ .$$

Là aussi toutes les réponses sont possibles, par exemple

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \text{ IP} \qquad , \qquad \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \text{ IG} \qquad , \qquad \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = \text{ AP}\ .$$

De là découlent d'autres indéterminations :

$$\frac{\text{LIM}}{\text{LIM}} = ? \qquad , \qquad \frac{\text{LIM}}{\text{IP}} = ? \qquad , \qquad \frac{\text{IP}}{\text{LIM}} = ? \qquad , \qquad \frac{\text{AP}}{\text{LIM}} = ?\ .$$

Exemple 2.1. *Soient ε un infiniment petit $\neq 0$, u un appréciable et H un infiniment grand. Que peut-on dire des nombres :*

$$\varepsilon^2 + \frac{u}{H} \quad , \quad \varepsilon + \frac{3}{u} \quad , \quad (u+\varepsilon)H \quad , \quad H^2 - H \quad , \quad \frac{H+1}{H+3}$$

Solution.

1. $\frac{1}{H}$ est ip d'où $\frac{u}{H}$ est le produit d'un limité et d'un ip, $\frac{u}{H}$ est donc ip. Le nombre ε^2 est un ip comme produit de deux ip. En conclusion, $\varepsilon^2 + \frac{u}{H}$ est la somme de deux ip, c'est donc un ip.
2. $\frac{1}{u}$ est ap comme inverse d'un ap, $\frac{3}{u}$ est aussi un ap comme produit de deux ap. $\varepsilon + \frac{3}{u}$ est la somme d'un ip et d'un ap, c'est donc un ap.
3. $u+\varepsilon$ est ap comme somme d'un ap et d'un ip. $(u+\varepsilon)H$ est donc un ig comme produit d'un ap et d'un ig.
4. On a :
$$H^2 - H = H^2\,(1 - \frac{1}{H})\;.$$
Or $1 - \frac{1}{H}$ est un ap > 0 comme somme d'un ap > 0 et d'un ip. $H^2 - H$ est donc un ig > 0 comme produit d'un ig et d'un ap.
5. On a
$$\frac{H+1}{H+3} = \frac{1+1/H}{1+3/H} = (1 + \frac{1}{H})\,\frac{1}{(1+3/H)}\;.$$
Or $1 + \frac{1}{H}$ et $1 + \frac{3}{H}$ sont deux ap comme somme d'un ap et d'un ip. L'inverse d'un ap est un ap, $\frac{1}{1+3/H}$ est donc un ap. $\frac{H+1}{H+3}$ est un ap comme produit de deux ap.

2.3 Nombres infiniment proches, partie standard

Définition. *Deux hyperréels u, v sont* ***infiniment proches****, en abrégé $u \approx v$, lorsque leur différence $u - v$ est infiniment petite. La notation $u \not\approx v$ signifie que u et v ne sont pas infiniment proches.*

Autrement dit deux nombres u et v sont infiniment proches si et seulement s'il existe un infiniment petit ε tel que $v = u+\varepsilon$. Par exemple, si ε est ip, on a $2+\varepsilon \approx 2$ mais $1 + 10^{-9} \not\approx 1$.

Bien entendu *$u \approx u$ et, si $v \approx u$, on a $u \approx v$*. De plus, *($u \approx v$ et $v \approx w$) entraîne $u \approx w$*. En effet, si $u \approx v$ et $v \approx w$, la différence $u - w$ est ip puisque $u - w = (u - v) + (v - w)$.

Proposition 9.

1. *Tout nombre infiniment proche d'un infiniment petit, d'un appréciable, d'un limité, d'un infiniment grand, est respectivement infiniment petit, appréciable, limité, infiniment grand.*
2. *Tout nombre compris entre deux nombres infiniment proches est infiniment proche de ces deux nombres.*
3. *Deux réels infiniment proches sont égaux.*

En effet :
1) si on ajoute un ip à un nombre d'une catégorie envisagée, on obtient un nombre de la même catégorie ;

2) supposons $u \approx v$ et $u < w < v$, alors $0 < w - u < v - u$ d'où $w - u$ est compris entre deux ip et est donc ip ;
3) supposons que r_1, r_2 soient des réels infiniment proches, alors $r_2 - r_1$ est un réel ip d'où il est égal à 0. □

Il est clair que si deux nombres sont infiniment proches, en ajoutant à ces deux nombres un même nombre, on obtient encore deux nombres infiniment proches. Mais pour le produit il faut être plus prudent : par exemple si ε est ip, on a $\varepsilon \approx 2\varepsilon$ et, si on pose $H = \frac{1}{\varepsilon}$, on a

$$H \cdot \varepsilon = 1 \not\approx H \cdot (2\varepsilon) = 2 \, .$$

Toutefois, puisque $\lambda u - \lambda v = \lambda(u - v)$, si $u - v$ est ip et si λ est limité, on a que $\lambda u - \lambda v$ est ip, en conclusion :

si $u \approx v$ et si λ est limité, alors $\lambda u \approx \lambda v$.

Nous savons que tout hyperréel infiniment proche d'un réel est un hyperréel limité. Voici un résultat capital qui nous dit que la réciproque est vérifiée.

Théorème 10 (Partie standard)**.**
Tout hyperréel limité est infiniment proche d'un et d'un seul réel.

Démonstration. Soit u un hyperréel limité.

1. *Unicité.* Si r_1 et r_2 sont des réels infiniment proches de u, alors $r_1 \approx r_2$ d'où $r_1 = r_2$.
2. *Existence.* Il existe un réel r_1 tel que $|u| \leq r_1$ c'est-à-dire $-r_1 \leq u \leq r_1$. Considérons l'ensemble

$$E := \{x : x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq u\} \, .$$

E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $-r_1 \in E$) et bornée supérieurement dans $\mathbb{R}$ (car r_1 est un majorant réel de E). Travaillons dans $\mathbb{R}$ et appliquons le Théorème de complétude des réels : l'ensemble E admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notons-la α . Le nombre α est donc un réel, montrons que ce réel est infiniment proche de u. Soit r un réel > 0 quelconque. Il nous reste à prouver $|u - \alpha| < r$ c'est-à-dire que

$$-r < u - \alpha < r \, .$$

Pour chacune de ces deux inégalités raisonnons par l'absurde.
1) Supposons $u - \alpha \not< r$. Alors $u - \alpha \geq r$ d'où $\alpha + r \leq u$ et $\alpha + r$ serait dans E, il s'ensuivrait $\alpha + r \leq \alpha$ et $r \leq 0$. Cela est impossible puisque $r > 0$. Donc $u - \alpha < r$.
2) Supposons $-r \not< u - \alpha$. Alors $-r \geq u - \alpha$ d'où $\alpha - r \geq u$ et $\alpha - r$ serait un majorant réel de E. Puisque α est le plus petit des majorants réels de E, on aurait $\alpha - r \geq \alpha$ d'où $r \leq 0$, ce qui est impossible. Par conséquent $-r < u - \alpha$. □

Définition. *La* ***partie standard*** *d'un nombre limité u , notée* $\mathrm{st}(u)$ *ou encore $^o u$, est l'unique réel qui soit infiniment proche de u .*

Par exemple, si ε est infiniment petit, on a $\mathrm{st}(2 + \varepsilon) = 2$ et plus généralement pour tout réel r on a $\mathrm{st}(r + \varepsilon) = r$. Il est clair :

— *la partie standard d'un réel est ce réel ;*
— *un limité est infiniment petit si et seulement si sa partie standard est* 0 *;*
— *deux nombres limités sont infiniment proches si et seulement s'ils ont la même partie standard.*

Maintenant on peut très facilement prouver qu'il existe un infiniment petit non nul. Rappelons qu'on a admis qu'il existe un hyperréel u qui n'est pas réel, deux cas se présentent :
— u est un infiniment grand, alors $1/u$ est un infiniment petit non nul ;
— u est limité, alors $u - \operatorname{st}(u)$ est un infiniment petit non nul.
En conclusion :

Théorème 11 (A. Robinson[3])**.**
Il existe des infiniment petits non nuls et donc aussi des infiniment grands.

Voyons maintenant des règles pour chercher les parties standard.

Théorème 12. *Soient* u, v *des hyperréels limités. Alors :*

$$\boxed{\operatorname{st}(u+v) = \operatorname{st}(u) + \operatorname{st}(v) \quad , \quad \operatorname{st}(u-v) = \operatorname{st}(u) - \operatorname{st}(v) \quad , \quad \operatorname{st}(-u) = -\operatorname{st}(u)}$$

$$\boxed{\operatorname{st}(u \cdot v) = \operatorname{st}(u) \cdot \operatorname{st}(v)}$$

et pour tout naturel n*,*

$$\boxed{\operatorname{st}(u^n) = (\operatorname{st}(u))^n} \,.$$

Si u *est appréciable,*

$$\boxed{\operatorname{st}(\frac{1}{u}) = \frac{1}{\operatorname{st}(u)} \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{st}(\frac{v}{u}) = \frac{\operatorname{st}(v)}{\operatorname{st}(u)}} \,.$$

Démonstration. Soient u, v des limités. Il existe des ip $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $u = \operatorname{st}(u) + \varepsilon_1$, $v = \operatorname{st}(v) + \varepsilon_2$.
1. *Somme et produit.* Nous avons :

$$\begin{aligned} u + v &= \operatorname{st}(u) + \operatorname{st}(v) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \,, \\ u \cdot v &= \operatorname{st}(u) \cdot \operatorname{st}(v) + \varepsilon_2 \cdot \operatorname{st}(u) + \varepsilon_1 \cdot \operatorname{st}(v) + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \,. \end{aligned}$$

Les nombres $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $\varepsilon_2 \cdot \operatorname{st}(u) + \varepsilon_1 \cdot \operatorname{st}(v) + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ sont des ip, par conséquent $u + v \approx \operatorname{st}(u) + \operatorname{st}(v)$ et $u \cdot v \approx \operatorname{st}(u) \cdot \operatorname{st}(v)$ d'où la règle pour la somme et le produit.
2. *Inverse.* Soit u appréciable. Alors $\operatorname{st}(u) \neq 0$ et $1/u$ est appréciable. En appliquant la règle du produit à $u \cdot (1/u) = 1$, il vient $\operatorname{st}(u) \cdot \operatorname{st}(1/u) = 1$ d'où $\operatorname{st}(1/u) = 1/\operatorname{st}(u)$.
□

3. en hommage à Abraham Robinson, fondateur de l'Analyse non standard.

Exemple 2.2. *Cherchons, s'il y a lieu, les parties standard des hyperréels rencontrés lors de l'exemple 2.1.*

Solution. Rappelons que ε, u, H sont respectivement un ip $\neq 0$, un ap et un ig.

1. $\varepsilon^2 + \frac{u}{H}$ est un ip, sa partie standard vaut donc 0.
2. $\mathrm{st}(\varepsilon + \frac{3}{u}) = \mathrm{st}(\varepsilon) + \mathrm{st}(\frac{3}{u}) = 0 + \frac{3}{\mathrm{st}(u)} = \frac{3}{\mathrm{st}(u)}$.
3. $(u+\varepsilon)H$ n'a pas de partie standard car c'est un ig.
4. $H^2 - H$ n'a pas de partie standard car c'est un ig.
5. Puisque $\mathrm{st}(1 + 3/H) = 1 \neq 0$, on a

$$\mathrm{st}(\frac{H+1}{H+3}) = \mathrm{st}(\frac{1+1/H}{1+3/H}) = \frac{\mathrm{st}(1+1/H)}{\mathrm{st}(1+3/H)} = \frac{1}{1} = 1\ .$$

Exemple 2.3. *Soit x limité et ε un infiniment petit $\neq 0$. Que pouvons-nous dire des nombres u, v, w suivants ? S'ils sont limités cherchons leur partie standard.*

$$u := \frac{\varepsilon}{x+2} \qquad , \qquad v := \frac{x-1}{\varepsilon} \qquad , \qquad w := \frac{x+2}{x-1} \qquad .$$

Solution.

1. *Nombre u.* On doit distinguer deux cas :
   — si $\mathrm{st}(x) \neq -2$, alors $1/(x+2)$ est ap et u est le produit d'un ip et d'un ap, u est donc ip et sa partie standard vaut donc 0 ;
   — si $\mathrm{st}(x) = -2$ et $x \neq -2$, le nombre u est le rapport de deux ip, on ne peut alors rien dire de u.
2. *Nombre v.* On doit encore distinguer deux cas :
   — si $\mathrm{st}(x) \neq 1$, alors $x - 1$ est ap et le nombre v est le produit d'un ap et d'un ig, le nombre v est donc ig ;
   — si $\mathrm{st}(x) = 1$, alors $x - 1$ est ip, le nombre v est alors le rapport de deux ip, on ne peut donc rien dire de v.
3. *Nombre w.* De nouveau distinguons deux cas :
   — si $\mathrm{st}(x) \neq 1$, le nombre w est le rapport d'un limité sur un ap, alors w est limité et
   $$\mathrm{st}(w) = \frac{\mathrm{st}(x+2)}{\mathrm{st}(x-1)} = \frac{\mathrm{st}(x)+2}{\mathrm{st}(x)-1}\ .$$
   Par conséquent
   — si $\mathrm{st}(x) = -2$, alors w est ip,
   — si $\mathrm{st}(x)$ diffère de -2 et de 1, alors w est ap.
   — si $\mathrm{st}(x) = 1$ et $x \neq 1$, le nombre w est le rapport d'un ap sur un ip et est donc ig ; cet ig est > 0 si $x > 1$ et est < 0 si $x < 1$.

Commentaire

Il faut ici remarquer qu'un des apports importants de l'Analyse non standard, en plus bien entendu de l'existence du corps des nombres hyperréels et de l'existence de nombres infiniment petits non nuls, est **l'utilisation de la relation "*infiniment***

proche". En effet au 17^e et 18^e siècle on considérait déjà des quantités infinitésimales, mais on n'hésitait pas à relier par un signe d'égalité des quantités dont les différences étaient infiniment petites, à certains moments les quantités infinitésimales étaient traitées au niveau du calcul comme nulles et à d'autre pas (à ce sujet la lecture du chapitre 3 des *Fondements du calcul différentiel* d'Euler ([2]) est tout à fait symptomatique). D'où évidemment un sentiment d'incohérence qu'on peut parfois avoir maintenant devant ces raisonnements, mais **cette incohérence disparaît si, à bon escient, on substitue à l'égalité la relation "*infiniment proche*"**.

2.4 Représentation des nombres limités

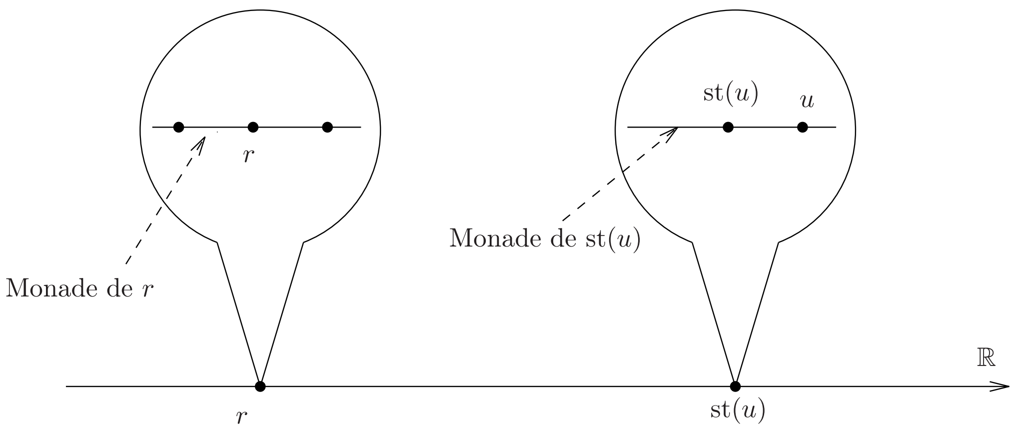


FIGURE 2.2: Fenêtres ouverte sur la monade d'un réel r et sur la monade de $\mathrm{st}(u)$.

On peut maintenant donner une bonne représentation des hyperréels limités.

> *Comme précédemment on représente les réels sur une droite cartésienne. Pour chaque réel r on appelle* ***monade*** *de r ou encore le* ***halo*** *de r l'ensemble de tous les nombres infiniment proches de r. On représente la monade de r comme sur la figure 2.2, il s'agit là d'une représentation imagée montrant une fenêtre ouverte sur la monade de r, cette fenêtre peut être agrandie à volonté pour représenter des nombres infiniment proches de r qui n'apparaîtraient pas dans la fenêtre initiale.*
>
> *Ainsi dans la monade de r on observe les nombres infiniment proches de r qui sont forcément limités. Faisons varier le nombre r parmi tous les réels, alors on observe* ***tous les nombres limités****. En effet, d'après le Théorème de la partie standard,* ***tout nombre limité est dans la monade de sa partie standard*** *et est donc observé dans une certaine monade. Réciproquement tout nombre apparaissant dans une monade est un limité puisqu'il est infiniment proche du réel relatif à la monade observée.* ***Les nombres limités sont donc exactement les nombres qui apparaissent dans les monades de tous les réels***

On peut aussi dire :

en chaque point de la droite cartésienne il y a une infinité de nombres limités tous infiniment proches et tous observés comme confondus avec leur partie standard, c'est la raison pour laquelle, la partie standard est aussi appelée **la partie observable**. *Si on veut distinguer tous ces nombres infiniment proches il faut ouvrir une fenêtre sur la monade de la partie standard, là on peut observer distinctement tous ces nombres infiniment proches.*

On convient de représenter les nombres d'une monade d'un réel r comme sur la figure 2.2 par ordre croissant en allant de gauche vers la droite. De la sorte en se déplaçant de gauche vers la droite

1. sur la droite cartésienne on rencontre des nombres réels de plus en plus grands,
2. dans chaque monade on rencontre des nombres infiniment proches et croissants.

Par exemple la situation $u := 1 - 2\varepsilon$, $v := 1 - \varepsilon$ et $w := 1 + \varepsilon$, où ε est ip > 0 est représentée sur la figure 2.3.

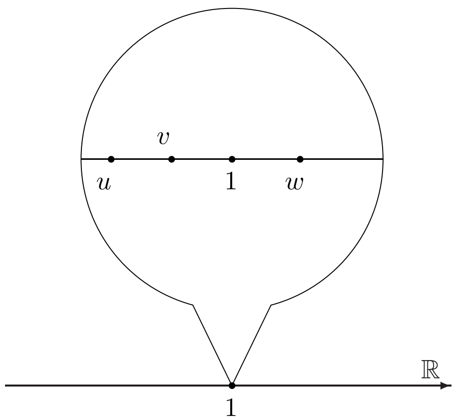


FIGURE 2.3: $u = 1 - 2\varepsilon$, $v = 1 - \varepsilon$ et $w = 1 + \varepsilon$.

On va bientôt compléter cela en comparant des nombres limités n'apparaissant pas dans la même monade, auparavant voyons comment se comporte la partie standard par rapport à la relation d'ordre.

Théorème 13. *Soient u , v limités. Alors $u \leq v$ implique* $\mathrm{st}(u) \leq \mathrm{st}(v)$ *, en particulier $u < v$ implique* $\mathrm{st}(u) \leq \mathrm{st}(v)$ *.*

Démonstration. Montrons d'abord que la partie standard de tout limité positif est positive. Soit u un limité ≥ 0. Si $\mathrm{st}(u) < 0$, on aurait $\mathrm{st}(u) < 0 \leq u$ et donc $\mathrm{st}(u)$ serait infiniment proche de 0 et donc égal à 0, ce qui est impossible. Donc $\mathrm{st}(u) \geq 0$.

Soient u, v limités tels que $u \leq v$. Puisque $v - u \geq 0$, on a

$$0 \leq \mathrm{st}(v - u) = \mathrm{st}(v) - \mathrm{st}(u)$$

d'où $\mathrm{st}(u) \leq \mathrm{st}(v)$. □

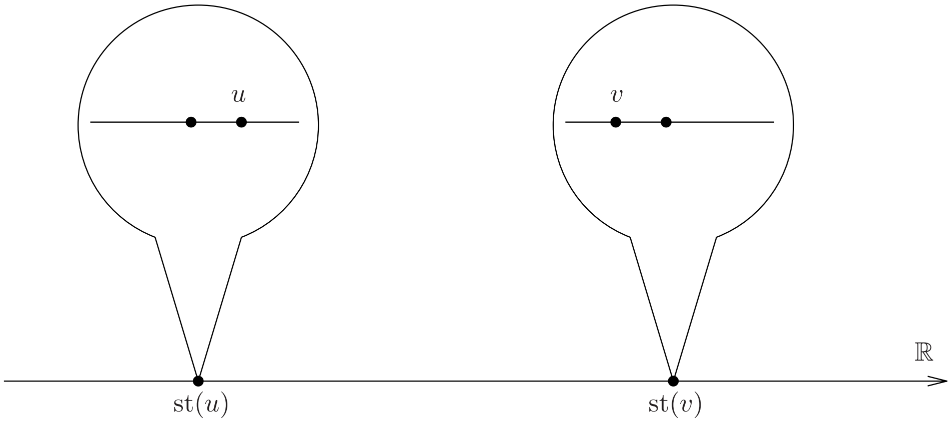


Figure 2.4: $u < v$ et $u \not\approx v$.

$u < v$ *n'implique pas* $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(v)$, ainsi, si ε est ip > 0 et r est un réel, on a

$$r < r + \varepsilon < r + 2\varepsilon \text{ et } \mathrm{st}(r) = \mathrm{st}(r + \varepsilon) = \mathrm{st}(r + 2\varepsilon) \ .$$

Mais, vu le théorème ci-dessus,

$\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(v)$ *implique* $u < v$.

Comparons maintenant deux nombres limités u, v n'apparaissant pas dans la même monade, alors $\mathrm{st}(u) \neq \mathrm{st}(v)$ et il suffit de comparer $\mathrm{st}(u)$ et $\mathrm{st}(v)$: si $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(v)$ on a $u < v$ et si $\mathrm{st}(v) < \mathrm{st}(u)$ on a $v < u$. Par conséquent

si un hyperréel u apparaît dans une monade se trouvant à la gauche de la monade dans lequel se trouve l'hyperréel v, alors $u < v$ (voir figure 2.4). De même, si un réel r apparaît à la gauche de la monade où se trouve u, alors $r < u$, et si un réel r' apparaît à la droite de la monade où se trouve u, alors $u < r'$. (voir figure 2.5)

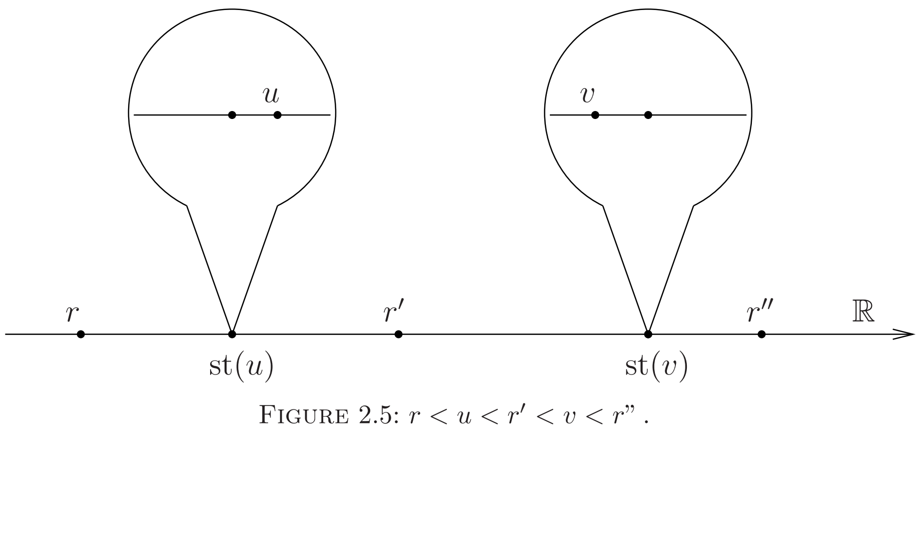


Figure 2.5: $r < u < r' < v < r$" .

Il s'ensuit que si u, v sont des limités non infiniment proches, en prenant un réel compris strictement entre leur partie standard, on obtient un réel compris strictement entre u, v, d'où

entre deux limités non infiniment proches il existe toujours un réel.

Dans les monades des réels, on n'observe aucun infiniment grand. Comment dès lors se représenter les infiniment grands ? On peut simplement dire que les infiniment grands positifs (resp. négatifs) sont les nombres qui sont supérieurs (resp. inférieurs) à tous les nombres observés dans les monades de tous les réels.

Complétons les règles concernant la partie standard :

$$\boxed{\mathrm{st}(|u|) = |\,\mathrm{st}(u)|}\ .$$

En effet : si $u \geq 0$, on sait que $\mathrm{st}(u) \geq 0$ d'où $|\,\mathrm{st}(u)| = \mathrm{st}(u) = \mathrm{st}(|u|)$; de même, si $u < 0$, on sait que $st(u) \leq 0$ d'où $|\,\mathrm{st}(u)| = -\,\mathrm{st}(u) = \mathrm{st}(-u) = \mathrm{st}(|u|)$.

2.5 Exemples

Exemple 2.4. *Soit ε ip > 0. Que peut-on dire des nombres u, v, w suivants :*

$$u := \frac{2+\varepsilon}{3+2\varepsilon} \qquad , \qquad v := \frac{5-\varepsilon}{2-2\varepsilon} \qquad , \qquad w := \frac{2-2\varepsilon}{3-\varepsilon} \qquad .$$

Solution. Ces trois nombres sont des rapports d'ap donc des produits d'ap, ils sont donc ap et on a :

$$st(u) = \frac{\mathrm{st}(2+\varepsilon)}{\mathrm{st}(3+2\varepsilon)} = \frac{2}{3}\ ,\ \mathrm{st}(v) = \frac{\mathrm{st}(5-\varepsilon)}{\mathrm{st}(2-2\varepsilon)} = \frac{5}{2}\ ,\ \mathrm{st}(w) = \frac{\mathrm{st}(2-2\varepsilon)}{\mathrm{st}(3-\varepsilon)} = \frac{2}{3}\ .$$

Comparons les nombres $\frac{2}{3}$, u, w :

$$\begin{aligned} u - \frac{2}{3} &= \frac{2+\varepsilon}{3+2\varepsilon} - \frac{2}{3} = \frac{-\varepsilon}{3(3+2\varepsilon)} < 0 \\ w - \frac{2}{3} &= \frac{2-2\varepsilon}{3-\varepsilon} - \frac{2}{3} = \frac{-4\varepsilon}{3(3-\varepsilon)} < 0 \\ u - w &= \frac{2+\varepsilon}{3+2\varepsilon} - \frac{2-2\varepsilon}{3-\varepsilon} = \frac{3\varepsilon^2+3\varepsilon}{(3+2\varepsilon)(3-\varepsilon)} > 0 \end{aligned}$$

par conséquent $w < u < 2/3$.
Comparons maintenant $\frac{5}{2}$ et v : $\frac{5}{2} - v = \frac{-4\varepsilon}{2-\varepsilon} < 0$. Par conséquent $5/2 < v$.

On peut maintenant représenter les nombres u, v, w comme sur la figure 2.6.

Exemple 2.5. *Soit u un hyperréel > 1. Que peut-on dire du nombre*

$$w := \frac{2u+1}{u-1} \qquad ?$$

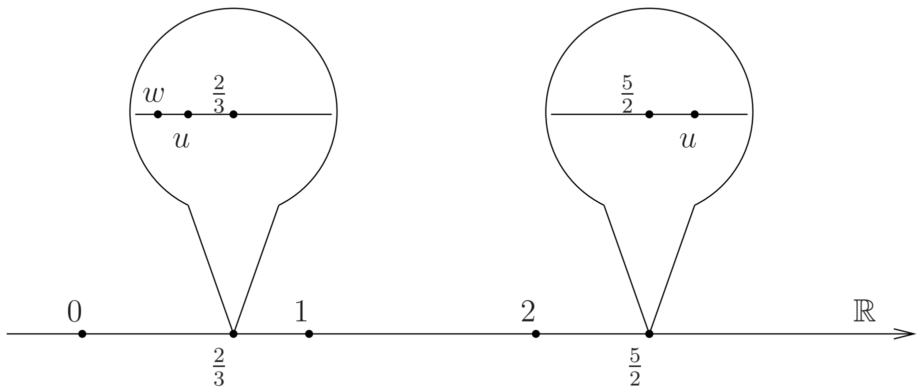
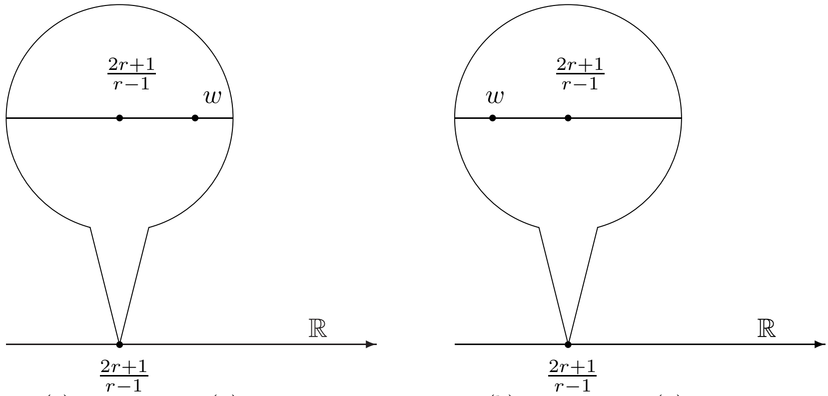


FIGURE 2.6: $w < u < \operatorname{st}(u) = \operatorname{st}(w) = \frac{2}{3}$ et $\operatorname{st}(v) = \frac{5}{2} < v$.

Solution. On doit distinguer plusieurs cas.

1. *Le nombre u est limité et* $\operatorname{st}(u) = 1$.
Alors $\operatorname{st}(2u+1) = 2\operatorname{st}(u) + 1 = 3$. Le nombre w est le rapport d'un ap sur un ip, c'est-à-dire le produit d'un ap et d'un ig, le nombre w est donc ig et, puisque $u > 1$, cet infiniment grand est positif.
2. *Le nombre u est limité et* $\operatorname{st}(u) \neq 1$.
Alors le nombre w est le rapport d'un limité sur un ap, c'est-à-dire le produit d'un limité et d'un ap, le nombre w est alors limité et
$$\operatorname{st}(w) = \frac{\operatorname{st}(2u+1)}{\operatorname{st}(u-1)} = \frac{2\operatorname{st}(u)+1}{\operatorname{st}(u)-1}\ .$$
Puisque $u > 1$, le nombre $\operatorname{st}(w)$ est > 0 et w est donc ap. Comparons w et $\operatorname{st}(w)$:
$$w - \operatorname{st}(w) = \frac{2u+1}{u-1} - \frac{2\operatorname{st}(u)+1}{\operatorname{st}(u)-1} = \frac{3(\operatorname{st}(u)-u)}{(u-1)(\operatorname{st}(u)-1)}\ .$$
Ici $\operatorname{st}(u) > 1$, d'où $u > 1$ et
— si $u < \operatorname{st}(u)$, on a $w > \operatorname{st}(w)$,
— si $u > \operatorname{st}(u)$, on a $w < \operatorname{st}(w)$.
Ces deux situations sont illustrées sur les figures (2.7a) et (2.7b).
3. *Le nombre u est infiniment grand positif.* Alors
$$w = \frac{2+\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u}}$$
d'où w est ap et
$$\operatorname{st}(w) = \frac{\operatorname{st}(2+\frac{1}{u})}{\operatorname{st}(1-\frac{1}{u})} = 2\ .$$
Comparons w avec 2 : $w - 2 = \frac{3}{u-1} > 0$. Le nombre w est donc > 2.
Cette situation est illustrée sur la figure (2.8)



(a) cas où $u < \mathrm{st}(u) = r$ (b) cas où $u > \mathrm{st}(u) = r$

FIGURE 2.7: exemple 2.5, u limité et $u \not\approx 1$.

2.6 Exercices.

1. Soient ε, δ des ip $\neq 0$, u, v des appréciables, H un ig positif et K un ig.
   Que peut-on dire des hyperréels suivants :

1) $(3+\varepsilon)(5+\delta)-15$ 2) $\dfrac{6+\delta}{5+\varepsilon}-\dfrac{6}{5}$ 3) $\dfrac{1}{\varepsilon}(\dfrac{1}{2+\varepsilon}-\dfrac{1}{2})$

4) $3+\dfrac{1}{\delta}$ 5) $\dfrac{v+5\varepsilon}{u-3\delta}$ 6) $\dfrac{4\varepsilon^3-5\varepsilon^2-\varepsilon}{2\varepsilon}$

7) $\dfrac{3\varepsilon^4-\varepsilon^3+8\varepsilon^2}{\varepsilon^3+\varepsilon}$ 8) $\dfrac{6\varepsilon^4+5\varepsilon^3}{\varepsilon^4+\varepsilon^3-3\varepsilon^2}$ 9) $\dfrac{\varepsilon^3}{\delta^2}$

10) $10^9\cdot\varepsilon$ 11) $\varepsilon\cdot H$ 12) $(2H+\dfrac{\varepsilon}{H})^2-(2H-\dfrac{\varepsilon}{H})^2$

13) $(H+5)\cdot\varepsilon$ 14) $\dfrac{H}{10^6}$ 15) $\dfrac{2H^2+H-5}{H^2-H}$

16) $\dfrac{K+10}{H^2}$ 17) H^2-3H 18) $\dfrac{H+K}{2H\cdot K}$

2. Soient ε, δ ip non nuls, H un ig positif et a, b des réels. Que peut-on dire des nombres suivants. S'ils sont limités, calculez leur partie standard.

1) $2+\varepsilon-5\varepsilon^3$ 2) $(3+\varepsilon-2\delta)(1-\varepsilon\delta)$

3) $\dfrac{\varepsilon^3+5\varepsilon^2-\varepsilon}{2\varepsilon^2+\varepsilon+3}$ 4) $\dfrac{3\varepsilon^4-2\varepsilon^3-\varepsilon^2}{6\varepsilon^4+\varepsilon^2-2\varepsilon}$

5) $\dfrac{5H+6}{H^3-1}$ 6) $\dfrac{2H+2+\varepsilon}{H-5+2\varepsilon}$

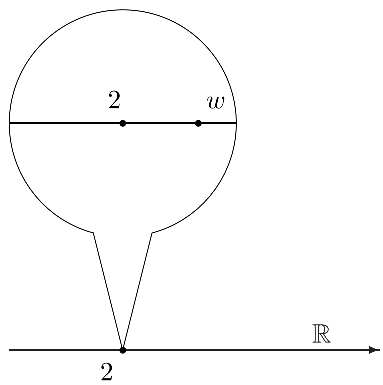


FIGURE 2.8: cas où u est infiniment grand.

cherchez leur partie standard et représentez-les sur un même dessin.

$\dfrac{2-\varepsilon}{1+\varepsilon}$	$\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$
$\dfrac{2+\varepsilon}{5+2\varepsilon}$	$\dfrac{2+3\varepsilon}{5-\varepsilon}$
$\dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$	$\dfrac{2-100\varepsilon}{3+2\varepsilon}$

4. Soient u, v limités, H ig et ε ip non nul. Déterminez la nature des nombres suivants. Le cas échéant cherchez leur partie standard :

$(\varepsilon+u)(H+u)$	$(2+u)H$
$\dfrac{u+2\varepsilon}{u-\varepsilon}$	$2u+\varepsilon$
$\dfrac{u+\varepsilon}{H}$	$3+u+2\varepsilon$
$\dfrac{u-v}{u+v}$	$\dfrac{1}{u+v}$

5. Soit ε un ip > 0. Les ensembles suivants ont-ils dans *les réels* un maximum, une borne supérieure. Si oui, quel est ce maximum ou cette borne supérieure.

$$A = \{x \,:\, x \text{ réel et } x \leq 2+\varepsilon\} \quad , \quad B = \{x \,:\, x \text{ réel et } x \leq 2-\varepsilon\} \;.$$

6. L'ensemble des nombres limités est borné supérieurement dans ${}^*\mathbb{R}$ mais n'a pas dans ${}^*\mathbb{R}$ de borne supérieure. Prouvez-le.

De même l'ensemble des infiniment grands positifs est borné inférieurement dans $^*\mathbb{R}$ mais n'a pas de borne inférieure dans $^*\mathbb{R}$. Prouvez-le.

On voit ainsi que le Théorème de complétude des réels ne peut s'étendre aux hyperréels.

2.7 Rapports des nombres hyperréels à la réalité

Quel peut être le rapport avec la "réalité" de nombres infiniment grands, de nombres infiniment petits ? Est-il pertinent de considérer de pareils nombres si on envisage des applications concrètes ? De telles questions méritent réflexion et réponse. Mais en fait de telles questions ne peuvent être réservées aux nombres hyperréels, on peut également les poser à propos des nombres réels et même des nombres entiers. En effet il est très facile d'écrire un nombre naturel qui ne pourrait avoir aucune interprétation dans le monde qui nous entoure, il suffit de considérer le nombre 10^{1234} qui est estimé actuellement supérieur au nombre de particules composant l'univers. On pourrait également considérer un nombre rationnel > 0 qui serait inférieur à n'importe quelle mesure physique. En fait il ne s'agit pas que les nombres utilisés au niveau mathématique s'identifient à une réalité concrète mais plutôt qu'ils puissent participer à une modélisation efficace et fiable de situations et phénomènes du monde réel. Les Mathématiques n'ont pas pour fonction de se confondre avec ce que nous percevons être la réalité mais sont notamment là pour permettre de modéliser de façon efficace les phénomènes du monde "réel". Et précisément on peut trouver à ce niveau plusieurs avantages aux nombre hyperréels, ils vont notamment nous permettre de prendre en compte facilement la notion d'ordre de grandeur et cela directement au niveau des nombres utilisés.

Ainsi, dans un contexte donné, on pourrait distinguer trois catégories de quantités :

— celles qui sont mesurables par les moyens mis à disposition et qui sont mesurées comme non nulles, ce seraient ces quantités qui se représenteraient par des nombres appréciables,
— celles qui nous apparaissent comme nulles, elles seraient représentées par des nombres infiniment petits,
— celles qui sont trop grandes pour être mesurées, elles seraient alors représentées par des infiniment grands.

En général une mesure n'est pas exacte ; la différence entre le résultat de la mesure et la valeur exacte nous apparaît comme nulle et ces deux nombres pourraient donc être interprétés comme infiniment proches. De la sorte le résultat de la mesure pourrait être interprété comme la partie standard de la valeur exacte.

Le nombre 10^{1234} déjà rencontré plus haut est au niveau mathématique un nombre naturel "comme un autre", mais concrètement il se comporte comme un infiniment grand, ainsi, comme pour les infiniment grands théoriques, il est concrètement impossible à un être humain de l'atteindre au départ de 0 en itérant l'opération $+1$. En fait on peut dire que tout contexte concret, doté de ses moyens de mesure précis, a ses propres "infiniment petits", ses propres "infiniment grands", ses propres "appréciables".

On ne peut réduire la notion d'infiniment grand, d'infiniment petit à cette description. Toutefois les ordres de grandeur sont présents dans chaque situation concrète, il est utile de pouvoir rencontrer ces notions au mieux et les nombres hyperréels conviennent particulièrement bien pour cela. Il est clair que les problèmes d'ordre de grandeur sont liés à un contexte précis, ils ont donc essentiellement un caractère relatif. Toutefois, dès maintenant, on peut dire que dans l'absolu et au niveau des nombres on distingue trois ordres de grandeur :

— les infiniment grands,
— les appréciables,
— les infiniment petits.

Nous reviendrons plus tard (chapitre 6) sur ces problèmes d'ordre de grandeur et nous aborderons alors ces notions de façon relative.

Chapitre 3

Notion de dérivée

3.1 Quelques généralités à propos de fonctions

La notion de fonction remonte à Leibniz et J.Bernoulli mais il faut attendre le 19^e siècle pour que Dirichlet formule la notion moderne de fonction.

Considérons l'exemple suivant : à chaque réel x associons le nombre $y = x^2 + 1$; cette règle définit une fonction notée par exemple g, pour chaque réel x le nombre associé à x est appelé la valeur de g en x et est noté $g(x)$. Cette définition fait appel à deux variables : la variable x est appelée la **variable indépendante** et la variable y, dont les valeurs sont dictées par les valeurs de x, est appelée la **variable dépendante**.

En général une **fonction** f associe à des valeurs d'une *variable indépendante* x des valeurs d'une *variable dépendante* y de telle sorte qu'à chaque valeur de x n'est associé qu'**une seule** valeur de y. Alors la valeur de y associée à la valeur de x est appelée la **valeur de f en** x et est notée $f(x)$. L'ensemble de toutes les valeurs de x auxquelles la fonction f associe $f(x)$ est appelée l'**ensemble de définition** ou le **domaine de définition** de f.

Ainsi la règle qui à chaque réel x associe le nombre $y = x^2$ définit une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Par contre la règle qui à chaque réel $x \geq 0$ associe y tel que $x = y^2$ ne définit pas une fonction car à un $x \geq 0$ il correspond deux valeurs de y.

Bien entendu d'autres variables que x ou y peuvent être utilisées.

Pour représenter ou définir une fonction f plusieurs notations seront utilisées : si $\textsc{Expr}(x)$ représente une expression dépendant a priori de x (dans l'exemple ci-dessus il s'agit de l'expression x^2) et définie quel que soit x dans l'ensemble A, pour représenter la fonction f qui à chaque x dans A associe le nombre $y = \textsc{Expr}(x)$, on utilisera souvent les notations suivantes

$$h \;:\; x \in A \longmapsto y = \textsc{Expr}(x) \;,$$

ou

$$h(x) := \textsc{Expr}(x) \quad \text{avec } x \in A$$

ou encore

$$y = \textsc{Expr}(x) \quad \text{avec } x \in A \ .$$

Souvent l'ensemble de définition est pris le "plus grand" possible pour que l'expression $\textsc{Expr}(x)$ soit définie, aussi souvent on ne précise pas au préalable l'ensemble de définition. Alors la fonction est simplement définie par une des formes suivantes :

$$f \ : \ x \longmapsto y = \textsc{Expr}(x) \qquad f(x) := \textsc{Expr}(x) \qquad y = \textsc{Expr}(x)$$

ou même parfois, quand aucune ambiguïté n'est possible quant aux variables, par la simple expression

$$\textsc{Expr}(x) \ .$$

L'essentiel est que la définition soit claire et précise et que, si l'ensemble de définition n'est pas explicitement précisé, cet ensemble puisse être déterminé grâce à la définition donnée.

Ce qui est déterminant lorsqu'on définit une fonction, c'est de savoir quels nombres vont être pris en considération. Ci-dessus, au lieu de considérer la fonction

$$f_1 \ : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto y = x^2 \ .$$

on aurait pu considérer la même règle sur un ensemble plus restreint, par exemple sur l'ensemble des entiers, on aurait alors obtenu une fonction f_2 définie par

$$f_2 \ : \ x \in \mathbb{Z} \longmapsto y = x^2 \ .$$

On aurait également pu considérer la même règle sur un ensemble plus vaste, les complexes ou les hyperréels, on aurait ainsi obtenu des fonctions f_3, f_4 définies par

$$f_3 \ : \ x \in \mathbb{C} \longmapsto y = x^2 \qquad , \qquad f_4 \ : \ x \in {}^*\mathbb{R} \longmapsto y = x^2 \ .$$

On dit alors que la fonction f_2 est la *restriction* de f_1 aux entiers et que la fonction f_3 est l'*extension* de f_1 aux nombres complexes et f_4 l'extension de f_1 aux hyperréels. En général *si A, B sont les ensembles de définition respectivement des fonctions f, g, si A est une partie de B et si pour tout x dans A on a $f(x) = g(x)$ on dit que f est la* ***restriction*** *de g à A et que g est une* ***extension*** *de f à B.*

On peut également considérer des fonctions de plusieurs variables réelles ou hyperréelles. Par exemple

$$l(x, y) := \frac{1}{x - y}$$

définit une fonction réelle l de deux variables définie pour tout (x, y) tel que $x \neq y$. Mais nous pourrions aussi prendre x, y hyperréels, alors à tout couple (x, y) d'hyperréels, on associerait le nombre hyperréel $\frac{1}{x-y}$, nous aurions alors une fonction hyperréelle de deux variables. De même

$$q(x, y, z) := (x^2 - y)(x + 2z) \ ,$$

permet de définir à la fois une fonction réelle de trois variables (en prenant x, y, z réels) et aussi une fonction hyperréelle de trois variables (en prenant x, y, z hyperréels)

En général, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables réelles, une **fonction réelle f de n variables** associe à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un et seul réel $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De même, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables hyperréelles, une **fonction hyperréelle f de n variables** associe à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un et seul hyperréel $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ainsi une fonction d'une ou plusieurs variables est dite réelle, respectivement hyperréelle, si ces variables et valeurs sont réelles, respectivement hyperréelles.

3.2 Premiers pas avec la dérivée

Considérons un mobile animé d'un mouvement rectiligne. Notons t le temps et sur la droite orientée sur laquelle se déplace le mobile fixons une origine et représentons par $e(t)$ la mesure du segment orienté allant de l'origine à la position du mobile à l'instant t. Soient t_0 et $t_0 + \Delta t$ deux instants fixés, la vitesse moyenne du mobile entre t_0 et $t_0 + \Delta t$ est le rapport

$$\frac{e(t_0 + \Delta t) - e(t_0)}{\Delta t} \,. \tag{3.1}$$

Pour approcher la vitesse instantanée en t_0 (ce qu'on appelle simplement la vitesse à l'instant t_0), dès le 17^e siècle, on considère le rapport (3.1) pour des variations Δt infiniment petites non nulles. Cet exemple essentiel auquel on doit associer I. Newton [1] et les débuts de la Mécanique, est aussi une des sources de l'Analyse infinitésimale. Pour une bonne part, ce sont les mêmes savants qui durant ce siècle vont développer les bases de la Physique "moderne" et créer l'Analyse mathématique.

Plus généralement et très fréquemment, étant donnée une fonction $x \mapsto y = f(x)$ on doit comparer la variation Δx de la variable indépendante x et la variation Δy de la variable dépendante y. Pour comparer ces deux variations on considère la fraction de la variation Δy sur la variation Δx, cette fraction $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est appelée le **quotient différentiel**, il dépend évidemment de Δx et de la position initiale x de la variable. Très souvent, notamment au niveau de nombreuses applications, on est amené à effectuer cette comparaison pour des variations Δx infiniment petites.

Envisageons deux exemples simples. Considérons d'abord la fonction $x \mapsto y = x^m$ où m est un naturel > 1 fixé. Soient x_0 réel et Δx un infiniment petit $\neq 0$. Une variation Δx de la variable x au départ de x_0 induit une variation Δy de la variable y donnée par

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^m - x_0^m \,.$$

En utilisant la Formule du binôme de Newton, le quotient différentiel de x^m en x_0 s'écrit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^m - x_0^m}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^{m} C_m^k \, x_0^{m-k} \, (\Delta x)^k = \sum_{k=1}^{m} C_m^k \, x_0^{m-k} \, (\Delta x)^{k-1} \,.$$

1. même si celui-ci n'utilise pas le langage infinitésimal.

Si on s'arrête là le quotient différentiel dépend de Δx. Mais pour chaque $k \geq 2$, le terme $C_m^k\, x_0^{m-k}(\Delta x)^{k-1}$ est infiniment petit. Il s'ensuit

$$\frac{(x_0+\Delta x)^m - x_0^m}{\Delta x} \approx C_m^1\, x_0^{m-1} = m\, x_0^{m-1}\ ,$$

ainsi les fluctuations du quotient différentiel sont toutes infiniment proches entre elles. Dès lors pour tirer des conclusions intrinsèques on prend la partie standard du quotient différentiel, autrement dit

$$\mathrm{st}\left(\frac{(x_0+\Delta x)^m - x_0^m}{\Delta x}\right) = m\, x_0^{m-1}\ ,$$

cette expression est maintenant indépendante de Δx, elle est le quotient différentiel observé dans les réels, c'est la **dérivée** de la fonction $x \mapsto x^m$ en x_0.

Envisageons maintenant la fonction $x \mapsto y = 1/x$ en prenant x_0 réel $\neq 0$. Le quotient différentiel s'écrit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}\ ,$$

de nouveau on remarque que le quotient différentiel fluctue, mais puisque

$$\mathrm{st}\left(\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}\right) = \frac{-1}{x_0^2}$$

ces fluctuations sont infiniment petites et on obtient la dérivée en prenant encore la partie standard du quotient différentiel, la dérivée de la fonction $x \mapsto 1/x$ en x_0 vaut donc $-1/x_0^2$.

Nous pourrions de la même façon chercher la dérivée des fonctions polynômes et même de toute fonction rationnelle car toute fonction rationnelle s'exprime comme une fraction de deux polynômes. En effet les nombres hyperréels formant un corps ordonné, toute fonction réelle définie au moyen d'une expression rationnelle (c'est-à-dire une expression ne faisant intervenir que des sommes, soustractions, produits et fractions) s'étend naturellement en une fonction hyperréelle définie au moyen de la même expression.

Mais qu'en est-il de fonctions réelles faisant appel à d'autres constructions, par exemple qu'en est-il de $x \mapsto y = \sin x$, ou plus simplement encore de $x \mapsto y = \sqrt{x}$? Peut-on considérer le sinus d'un hyperréel non réel, la racine carrée d'un hyperréel quelconque positif ? Cela est indispensable pour dériver $\sin x$, $\sqrt{x}$ ... C'est ici qu'on a besoin du Principe de transfert qui va traiter précisément de l'extension des fonctions réelles en fonctions hyperréelles.

Au chapitre suivant, on va formuler et expliquer ce Principe de transfert. Après nous pourrons continuer à dériver, notamment $\sqrt{x}$ et $\sin x$.

Chapitre 4

Principe de Transfert

Avant de formuler le Principe de transfert, il faut préciser certaines règles d'écriture concernant les formules que nous pourrons utiliser avec cette règle.

4.1 Formules et systèmes standard

Soient x, y, u, v des variables variant parmi des nombres, soient a, b des constantes représentant des nombres et f une fonction réelle ou hyperréelle d'une variable. On peut considérer les expressions

$$x + y \ , \ a \cdot x \ , \ \frac{x}{y} \ , \ \sin x \ , \ f(x) \ , \tag{4.1}$$

en remplaçant ci-dessus x par u^2, y par $\cos v$ on obtient de nouvelles expressions :

$$u^2 + \cos v \ , \ a \cdot u^2 \ , \ \frac{u^2}{\cos v} \ , \ \sin(u^2) \ , \ f(\cos v) \ , \tag{4.2}$$

en remplaçant ci-dessus u et v par exemple par $x + y$ et $x^2 z$ on obtiendra encore de nouvelles expressions et ainsi de suite. Les expressions qu'on vient de rencontrer seront dorénavant appelées des **expressions numériques**, elles répondent en fait à une construction itérative bien précise que voici :

— *toute variable ou constante numérique est une expression numérique ;*

— *si t_1, t_2 sont des expressions numériques, alors*

$$t_1 + t_2 \ , \ t_1 - t_2 \ , \ t_1 \cdot t_2 \ , \ \frac{t_1}{t_2}$$

sont également des expressions numériques ;

— *si f est une fonction réelle ou hyperréelle d'une variable et si t est une expression numérique, alors $f(t)$ est une expression numérique ; plus généralement si $g(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction réelle ou hyperréelle de n variables et si t_1, $\ldots$, t_n sont des expression numériques, alors $g(t_1, \ldots, t_n)$ est une expression numérique.*

Ainsi voici des expressions numériques :

$$3\ ,\ \pi\ ,\ \sin 5\ ,\ x^3+2x-1\ ,\ |x-y|\ ,\ \arcsin(2x-y)\ .$$

Très souvent, dans les réels ou les hyperréels, on est amené à comparer des nombres, donc aussi à comparer des expressions numériques. La proposition résultant de la comparaison de deux expressions numériques s'appelle une *formule atomique*, plus précisément

*une **formule atomique** est une proposition d'une des formes suivantes*

$$t_1 = t_2\ ,\ t_1 \le t_2\ , t_1 < t_2\ ,\ t_1 \ge t_2\ , t_1 > t_2 \tag{4.3}$$

où t_1 et t_2 sont des expressions numériques.

Il est important de préciser quand une formule atomique est vraie. La règle est la suivante :

pour qu'une formule atomique de la forme (4.3) soit vraie pour des valeurs accordées aux variables intervenant dans t_1 et t_2, il faut d'abord que les deux expressions numériques t_1, t_2 soient toutes deux définies pour les valeurs des variables envisagées, s'il en est ainsi il faut ensuite que les valeurs prises par t_1 et t_2 vérifient l'égalité ou l'inégalité considérée.

Ainsi la formule $x > 2y+3$ est vraie pour $x = 10$ et $y = 2$ et elle est fausse pour $x = 4$ et $y = 1$. Mais aussi, la formule $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ est vraie si et seulement si $x \neq 0$. De même les solutions de $\arcsin x = \arcsin x$ sont exactement les nombres réels faisant partie de l'intervalle $[-1,1]$. On dispose dès lors d'un moyen très simple pour exprimer au moyen d'une seule formule atomique le fait qu'une fonction soit définie :

si f est une fonction d'une variable, les solutions de $f(x) = f(x)$ sont exactement les nombres x pour lesquels $f(x)$ est définie.

Parfois on est amené à nier une formule atomique, par exemple à affirmer $x \neq 0$. Pour cela on utilise les notations suivantes :

$$t_1 \neq t_2\ ,\ t_1 \not< t_2\ ,\ t_1 \not> t_2\ ,\ t_1 \not\le t_2\ ,\ t_1 \not\ge t_2$$

qui représentent respectivement les négations de $t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$, $t_1 > t_2$, $t_1 \le t_2$, $t_1 \ge t_2$. La négation d'une formule atomique est vraie lorsque la formule atomique correspondante est fausse. Par conséquent, si une des expressions t_1, t_2 n'est pas définie, les formules $t_1 \neq t_2$, $t_1 \not< t_2$, $t_1 \not> t_2$, $t_1 \not\le t_2$, $t_1 \not\ge t_2$ sont d'office vérifiées. Ainsi la proposition $\sqrt{x} \neq \sqrt{x}$ est vraie si et seulement si $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ est fausse c'est-à-dire si et seulement si $x < 0$. *Pour ce qui concerne la vérification d'une formule, on traite donc différemment les formules atomiques et les négations de ces formules.*

Complétons la notion de formule :

*une **formule standard** est une formule atomique ou une négation de formule atomique telle que toutes les constantes et toutes les fonctions intervenant dans cette proposition soient réelles.*

Par exemple si a est une constante réelle et si f est une fonction réelle,

$$x = 2 \ , \ x < 1 \ , \ x + 2y = x^2 \ , \ \sin(x) \leq \cos(x + a) \ , \ x \not< 3y + a \ , \ f(x + \pi) \neq 2$$

sont des formules standard. Par contre, si ε est un infiniment petit fixé (et donc traité comme une constante), la formule $x \leq \varepsilon$ n'est pas une formule standard.

Evidemment de nombreuses fonctions réelles peuvent se définir au moyen d'une seule formule standard : par exemple la fonction f définie par $f(x) := \sqrt{2x+3}$ est complètement caractérisée par la formule standard $f(x) = \sqrt{2x+3}$. Mais tout dépend aussi des moyens qu'on se donne pour définir une fonction, ainsi si on veut définir la fonction $x \mapsto y = \sqrt{x}$ sans utiliser de racine carrée, deux formules standard sont nécessaires, à savoir

$$y^2 = x \text{ et } y \geq 0 \ ;$$

de la même façon pour définir la fonction $x \mapsto y = \arcsin(x)$ trois formules standard sont nécessaires :

$$\sin y = x \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \ .$$

Ainsi, souvent des propositions s'expriment en affirmant que plusieurs formules standard sont simultanément vérifiées ; on utilise alors ce qu'on appelle ici un *système standard* :

un ***système standard*** *est une collection finie de formules standard.*

Dans un système standard, toutes les constantes et toutes les fonctions rencontrées doivent donc être réelles. Remarquons qu'une seule formule standard constitue à elle seule un système standard.

Par exemple, si a, b sont des constantes réelles et si f est une fonction réelle, les systèmes

$$\begin{cases} a < x < b \\ f(x) \geq \sin(\pi x) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x < 2y + 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

sont standard, mais par contre, si ε est un infiniment petit fixé, chacune des formules

$$x < 1 + \varepsilon \qquad , \qquad x \geq \mathrm{st}(x)$$

n'est pas un système standard, car la première de ces formules contient une constante non réelle, à savoir ε, et la seconde fait appel à une fonction non réelle à savoir la fonction "*partie standard*" $x \mapsto \mathrm{st}(x)$.

Considérons un système standard dont les variables sont $x_1, \ldots, x_n$, notons-le $S(x_1, \ldots, x_n)$. Pour que ce système standard soit vérifié en $u_1, \ldots, u_n$ il faut que chacune des formules standard composant le système soit vérifiée quand on y remplace x_1 par u_1,..., x_n par u_n ; les nombres $u_1, \ldots, u_n$ constituent alors une **solution** de $S(x_1, \ldots, x_n)$. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont réels, cette solution est dite réelle, mais plus généralement les nombres $u_1, \ldots, u_n$ peuvent être hyperréels, la solution est alors dite hyperréelle.

Considérons deux systèmes ayant les mêmes variables. Les deux systèmes sont dits **équivalents** dans $\mathbb{R}$, respectivement dans $^*\mathbb{R}$, lorsqu'ils ont les mêmes solutions réelles, respectivement hyperréelles. Un système $S_1(x_1, \ldots, x_n)$ **entraîne** un système $S_2(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}$, respectivement dans $^*\mathbb{R}$, lorsque toute solution réelle, respectivement hyperréelle, de $S_1(x_1, \ldots, x_n)$ est solution de $S_2(x_1, \ldots, x_n)$

4.2 Principe de transfert

La première partie du Principe de transfert va permettre d'étendre toutes les fonctions réelles en des fonctions hyperréelles mais sans nous préciser pour quels hyperréels ces fonctions sont définies. Tout système standard va ainsi pouvoir être interprété dans les hyperréels, dès lors on va pouvoir considérer les solutions de ce système dans les réels mais aussi dans les hyperréels. Une question dès lors se pose : si deux systèmes standard ont les mêmes solutions réelles, ont-ils les mêmes solutions hyperréelles ? C'est précisément à cette question que la seconde partie du Principe de transfert répond ... et, comme on va le voir, la réponse est "oui".

Principe de transfert

1. **Extension des fonctions réelles**
   *Toute fonction réelle f s'étend en une fonction hyperréelle dont la restriction aux réels est exactement la fonction réelle initiale. Cette extension s'appelle l'**extension standard de** f*
2. **Conservation de l'équivalence des systèmes standard**
   Si deux systèmes standard sont équivalents dans les réels, alors ils sont équivalents dans les hyperréels.

Explicitons la première de ces deux règles dans le cas d'une fonction réelle f d'une variable : la fonction réelle f s'étend en une fonction hyperréelle, notée provisoirement ${}^*f$, telle que pour tout réel r l'expression ${}^*f(r)$ est définie si et seulement si $f(r)$ l'est, auquel cas ${}^*f(r) = f(r)$. Dès lors il n'y a pas d'ambiguïté à représenter cette extension par la même notation que la fonction f initiale. **L'extension standard de f est donc également notée f.**

Mais la première partie du Principe de transfert ne dit rien du comportement de $f(x)$ lorsque x est un hyperréel non réel ! C'est grâce à la deuxième partie que nous allons voir comment utiliser $f(x)$ pour x hyperréel non réel. Nous allons maintenant obtenir quelques règles simples concernant l'utilisation des fonctions réelles dans les hyperréels. On se limite d'abord aux fonctions réelles d'une variable [1].

Comment déterminer dans ${}^*\mathbb{R}$ quand $f(x)$ est définie ?

Envisageons un premier exemple. L'expression $\sqrt{x}$ est définie dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \geq 0$, dans les réels le système $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ est donc équivalent au système $x \geq 0$, il en est donc de même dans ${}^*\mathbb{R}$ et donc $\sqrt{x}$ est défini dans les hyperréels exactement lorsque $x \geq 0$.

Envisageons un second exemple, celui de la fonction arcsinus : dans $\mathbb{R}$ le système $\arcsin x = \arcsin x$ est équivalent au système $-1 \leq x \leq 1$, il en est donc de même dans ${}^*\mathbb{R}$, l'expression $\arcsin x$ est donc définie pour tout hyperréel x tel que $-1 \leq x \leq 1$ et seulement alors.

1. on envisage les fonctions réelles de plusieurs variables au chapitre 8.

Ces exemples se généralisent aisément : supposons que l'ensemble de définition de f dans $\mathbb{R}$ soit formé des réels vérifiant un système standard $S(x)$, alors les systèmes standard $f(x) = f(x)$ et $S(x)$ sont équivalents dans $\mathbb{R}$, il en est donc de même dans les hyperréels d'où $f(x)$ est définie dans ${}^*\mathbb{R}$ exactement pour les hyperréels vérifiant $S(x)$. En conclusion :

Si f est une fonction réelle d'une variable dont l'ensemble de définition dans $\mathbb{R}$ est formé par les réels x vérifiant un système standard $S(x)$, alors l'ensemble de définition de l'extension standard de f est l'ensemble des hyperréels vérifiant le même système.

En particulier

si la fonction réelle f est définie partout dans $\mathbb{R}$, alors son extension standard est définie dans ${}^*\mathbb{R}$ tout entier,

en effet il suffit alors de dire que $f(x) = f(x)$ est équivalent au système $x = x$. Par exemple les fonctions sin, cos, arctg sont maintenant définies dans ${}^*\mathbb{R}$ tout entier.

Comment calculer $f(x)$ pour x hyperréel ?

Comme on va le voir, les valeurs s'obtiennent dans les hyperréels au moyen des mêmes formules que dans les réels pour autant que celles-ci s'expriment au moyen d'un système standard. Envisageons d'abord quelques exemples.

Considérons la racine carrée, on sait déjà que $\sqrt{x}$ est défini pour tout hyperréel $x \geq 0$. Dans $\mathbb{R}$, si $x \geq 0$, on sait que $\sqrt{x}$ est l'unique nombre ≥ 0 qui élevé au carré donne x. Montrons qu'il en est de même dans les hyperréels. En effet $y = \sqrt{x}$ est équivalent à

$$y^2 = x \qquad , \qquad y \geq 0$$

dans $\mathbb{R}$ et donc aussi dans ${}^*\mathbb{R}$.

De même pour $\arcsin x$. Dans $\mathbb{R}$ l'équation $y = \arcsin(x)$ est équivalent au système standard

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad x = \sin y\,.$$

Il en est donc de même dans ${}^*\mathbb{R}$.

Considérons maintenant une fonction réelle définie par une seule formule atomique, par exemple

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,. \tag{4.4}$$

On sait déjà que cette fonction est définie dans $\mathbb{R}$ et dans ${}^*\mathbb{R}$ moyennant la même condition $x > -\frac{3}{2}$. Dans les réels le système $y = f(x)$ est équivalent au système $y = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$, il en est donc de même dans les hyperréels et les valeurs de $f(x)$ se calculent donc dans les hyperréels également par la formule (4.4). Par exemple, si ε est un infiniment petit > 0, on a

$$f(1+\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{5+2\varepsilon}} \qquad , \qquad f(-\frac{3}{2}+\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\,,$$

mais $f(-\frac{3}{2}-\varepsilon)$, comme $f(-\frac{3}{2})$ ne sont pas définies.

La généralisation de ces exemples est claire :

Si les valeurs d'une fonction réelle f sont définies ou caractérisées dans $\mathbb{R}$ par un système standard, alors les valeurs de l'extension standard de f se calculent dans ${}^*\mathbb{R}$ au moyen du même système.

4.3 Application à la racine carrée

On sait que $y = \sqrt{x}$ est équivalent à ($y^2 = x$ et $y \geq 0$). Utilisons cela pour étudier la racine carrée de nombres hyperréels ≥ 0. Soit $x \geq 0$. On a

$$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \quad \text{et} \quad 0 \leq \sqrt{x}\ , \tag{4.5}$$

alors des propriétés du produit il découle : *si x est limité, respectivement infiniment grand, infiniment petit, appréciable, alors il en est de même de $\sqrt{x}$*. Autrement dit :

$x \geq 0$	IP	AP	LIM	IG
$\sqrt{x}$	IP	AP	LIM	IG

Vu (4.5), si x est limité, on doit avoir

$$\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(\sqrt{x}) \cdot \mathrm{st}(\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathrm{st}(\sqrt{x})\ ,$$

il s'ensuit : *si x est limité et ≥ 0, alors*

$$\boxed{\mathrm{st}(\sqrt{x}) = \sqrt{\mathrm{st}(x)}}\ .$$

Utilisons cela pour dériver $\sqrt{x}$ ou plus précisément la fonction $x \mapsto y = \sqrt{x}$. Soit x_0 un réel fixé > 0. Prenons Δx infiniment petit $\neq 0$. Le quotient différentiel s'écrit

$$QD = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

ce qui donne une nouvelle indétermination $\frac{IP}{IP}$. Levons cette indétermination en multipliant "haut et bas" par $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$, on obtient ainsi

$$QD = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\ .$$

Puisque $\mathrm{st}(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}) = 2\sqrt{\mathrm{st}(x_0)} = 2\sqrt{x_0} \neq 0$, le quotient différentiel est l'inverse d'un appréciable, il est donc lui-même appréciable et

$$\mathrm{st}(QD) = \frac{1}{\mathrm{st}(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\ .$$

Par conséquent $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable dans $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ .}$$

Envisageons maintenant le cas où $x_0 = 0$. Alors on prend Δx infiniment petit > 0, le quotient différentiel est

$$\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

et est donc infiniment grand et on ne peut plus prendre la partie standard, dès lors la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ n'existe pas en 0.

4.4 Variantes du Principe de transfert

Souvent une fonction réelle jouit dans les réels de propriétés particulières. Que deviennent ces propriétés dans les hyperréels ? Nous allons voir que si ces propriétés se formulent grâce à des systèmes standard, elles sont maintenues dans ${}^*\mathbb{R}$.

Envisageons un premier exemple. On sait que pour tous réels x , y on a

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \ , \tag{4.6}$$

cette équation a donc les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$ que le système standard

$$x = x \qquad , \qquad y = y \ ,$$

il en est donc de même dans les hyperréels, d'où la formule classique de trigonométrie (4.6) est aussi valable dans les hyperréels. Plus généralement, supposons qu'un système standard $S(x_1, \ldots, x_n)$ soit vérifié pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$, alors ce système est équivalent dans $\mathbb{R}$ au système

$$x_1 = x_1 \qquad , \ldots , \qquad x_n = x_n$$

il en donc de même dans les hyperréels d'où :

> *Si un système standard $S(x_1, \ldots, x_n)$ est vérifié pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$, alors le système $S(x_1, \ldots, x_n)$ est aussi vérifié pour tous hyperréels $x_1, \ldots, x_n$.*

Souvent, pour qu'une propriété soit vérifiée, certaines conditions doivent être réalisées, on est alors en présence d'un schéma de la forme "*si ..., alors ...*". Envisageons un exemple de ce type. Supposons qu'une fonction réelle $f(x)$ soit croissante dans un intervalle $[a, b]$, autrement dit pour tous réels x, x' vérifiant $a \leq x < x' \leq b$, on a $f(x) \leq f(x')$. En est-il de même dans les hyperréels ? Nous allons voir que oui. Remarquons d'abord que dans les réels le système standard $a \leq x < x' \leq b$ entraîne le système standard $f(x) \leq f(x')$. Il s'ensuit que les deux systèmes standard

$$a \leq x < x' \leq b \qquad , \qquad \begin{cases} f(x) \leq f(x') \\ a \leq x < x' \leq b \end{cases}$$

sont équivalents dans $\mathbb{R}$, ils sont donc aussi équivalents dans ${}^*\mathbb{R}$. Ainsi dans les hyperréels, $a \leq x < x' \leq b$ entraîne également $f(x) \leq f(x')$. Nous venons en fait de transformer une implication en une équivalence, cela peut toujours se faire. En effet dire qu'un système S_1 entraîne un système S_2 revient à dire que le système S_1 est équivalent au système obtenu en prenant à la fois les formules de S_1 et de S_2 . Par conséquent la deuxième partie du Principe de transfert peut s'étendre comme suit :

> *Soient $S_1(x_1, \ldots, x_n)$ et $S_2(x_1, \ldots, x_n)$ deux systèmes standard, si dans les réels $S_1(x_1, \ldots, x_n)$ entraîne $S_2(x_1, \ldots, x_n)$, alors dans les hyperréels $S_1(x_1, \ldots, x_n)$ entraîne aussi $S_2(x_1, \ldots, x_n)$.*

Le plus souvent c'est cette forme de la Règle de transfert qui sera utilisée.

4.5 Application aux fonctions trigonométriques

Cherchons maintenant à dériver $\sin x$. Il n'est pas possible de transposer directement les définitions de $\sin x$ et $\cos x$ dans les hyperréels, en effet cette définition (qui fait appel à une construction géométrique) ne peut se formuler au moyen d'un système standard, *le contenu du dessin correspondant est trop "riche" que pour rentrer dans un système standard*. Aussi, nous allons établir dans les réels les propriétés de $\sin x$ et $\cos x$ dont nous aurons besoin, les exprimer au moyen de systèmes standard et ensuite nous appliquerons le Principe de transfert.

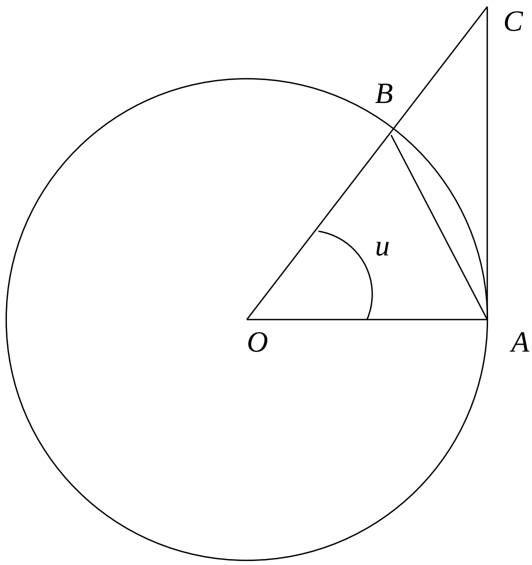


FIGURE 4.1: Comparaison des aires

Plaçons-nous d'abord dans les réels. Prenons x réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Considérons la figure 4.1 obtenue en traçant un cercle trigonométrique (de rayon 1), nous avons

$$\text{Aire du triangle } OAB < \text{ Aire du secteur circulaire } OAB < \text{ Aire du triangle } OAC \; .$$

Rappelons que l'aire d'un secteur circulaire de rayon r et dont la mesure (exprimée en radian dans $[0, 2\pi]$) de l'angle au centre vaut α vaut $\frac{r^2 \cdot \alpha}{2}$. On obtient ainsi :

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \; . \tag{4.7}$$

Ainsi dans $\mathbb{R}$ le système $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entraîne le système (4.7), il en est donc de même dans ${}^*\mathbb{R}$. Le système (4.7) est donc vérifié pour tout hyperréel x tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Prenons ε ip non nul. Si $\varepsilon > 0$, nous avons donc $0 < \sin \varepsilon < \varepsilon$, d'où $\sin \varepsilon$ est ip. Si $\varepsilon < 0$, $-\varepsilon$ est ip > 0 et $\sin(\varepsilon) = -\sin(-\varepsilon)$, par conséquent $\sin \varepsilon$ est encore ip.

Considérons maintenant $\cos\varepsilon$: on a $\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon = 1$ d'où, puisque $\cos\varepsilon > 0$,

$$\cos\varepsilon = \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon}$$

et donc

$$\mathrm{st}(\cos\varepsilon) = \mathrm{st}(\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon}) = \sqrt{1 - \mathrm{st}(\sin\varepsilon)^2} = 1\ .$$

Ainsi, *si* ε *est infiniment petit, on a* $\sin\varepsilon$ *infiniment petit et* $\mathrm{st}(\cos\varepsilon) = 1$.

Prenons maintenant un réel x_0. On a

$$\sin(x_0 + \varepsilon) = \sin x_0 \cos\varepsilon + \cos x_0 \sin\varepsilon$$

d'où $\mathrm{st}(\sin(x_0 + \varepsilon)) = \sin x_0$. On procèderait de la même façon pour $\cos(x_0 + \varepsilon)$. Ainsi, *si* x_0 *est un réel et si* ε *est infiniment petit*

$$\boxed{\mathrm{st}(\sin(x_0 + \varepsilon)) = \sin x_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{st}(\cos(x_0 + \varepsilon)) = \cos x_0\ .}$$

Reprenons la double inégalité (4.7) : si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a

$$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

et donc

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\ .$$

Prenons de nouveau ε ip > 0, on a donc

$$\cos\varepsilon < \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} < 1$$

et, puisque $\cos\varepsilon \approx 1$, la fraction $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1$. Si ε est ip < 0, on a

$$\frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\sin(-\varepsilon)}{-\varepsilon} \approx 1\ .$$

On a ainsi prouvé :

$$\boxed{\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1 \text{ pour tout } \varepsilon \text{ infiniment petit } \neq 0\ .}$$

On peut maintenant dériver $\sin x$. Soit x_0 un réel et Δx un infiniment petit $\neq 0$. Le quotient différentiel est

$$QD = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\ . \tag{4.8}$$

On vient de voir

$$\mathrm{st}(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}) = 1 \qquad \text{et } \mathrm{st}(\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})) = \cos x_0\ .$$

Il s'ensuit $\mathrm{st}(QD) = \cos x_0$ et la dérivée de $\sin x$ en x_0 vaut $\cos x_0$. Ainsi dans $\mathbb{R}$

$$\boxed{\sin' x = \cos x\ .}$$

De la même façon on prouve $\cos' x = -\sin x$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque que ci-dessus on a utilisé à plusieurs reprises le Principe de transfert.

4.6 Définition par cas distincts

Parfois une fonction est définie en envisageant plusieurs cas distincts. Par exemple considérons la fonction réelle f définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \tag{4.9}$$

alors :

— le système standard $x < 2$ entraîne dans $\mathbb{R}$ le système standard $f(x) = x^2$,

— le système standard $x \geq 2$ entraîne dans $\mathbb{R}$ le système standard $f(x) = \frac{1}{x}$,

il en est donc de même dans ${}^*\mathbb{R}$ d'où la définition (4.9) se prolonge dans les hyperréels.

On peut étendre cela à plus de deux cas. Formulons par exemple la règle lorsqu'on a trois cas : soient $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ trois systèmes standard *mutuellement exclusifs* et $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ trois fonctions réelles, définissons une nouvelle fonction $f(x)$ réelle en posant

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{si } S_1(x) \text{ est vérifié,} \\ f_2(x) & \text{si } S_2(x) \text{ est vérifié,} \\ f_3(x) & \text{si } S_3(x) \text{ est vérifié,} \end{cases} \tag{4.10}$$

Cette fonction réelle s'étend donc en une fonction hyperréelle et dans les hyperréels la définition ci-dessus (4.10) est valable pour tout hyperrréel x. En effet dans $\mathbb{R}$ le système $S_1(x)$ entraîne $f(x) = f_1(x)$, il en est donc de même dans ${}^*\mathbb{R}$, de même pour $S_2(x)$ et $S_3(x)$.

4.7 Intervalles dans ${}^*\mathbb{R}$

Soient a, b réels et $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ ne contient que des nombres réels : c'est l'ensemble des réels vérifiant $a \leq x \leq b$. On peut également considérer l'ensemble des solutions de ce système dans ${}^*\mathbb{R}$, cet ensemble est noté ${}^*[a, b]$. On peut faire de même pour les autres types d'intervalles de $\mathbb{R}$, par exemple $]a, +\infty[$ est l'ensemble des solutions réelles de $a < x$ et ${}^*]a, +\infty[$ représente donc l'ensemble des hyperréels tels que $a < x$. Ainsi tout intervalle I de $\mathbb{R}$ s'étend en un intervalle ${}^*I$ de ${}^*\mathbb{R}$. Remarquons :

1. La proposition $x \in I$ se traduit par un système standard formé d'une ou deux inégalités et dans ${}^*\mathbb{R}$ la proposition $x \in {}^*I$ se traduit par le même système standard, par conséquent *dans un système standard on peut inclure une formule de la forme $x \in I$ à condition de l'interpréter dans les hyperréels par $x \in {}^*I$.*
2. Si une fonction réelle est définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors son extension aux hyperréels est définie dans ${}^*I$.
3. L'intervalle ${}^*I$ contient toutes les monades des réels se trouvant à l'intérieur de I , pour ce qui est des extrémités plusieurs cas se présentent, par exemple :
   — si $I = [a, \ldots ,$ tous les x tels que $x \approx a$ et $x \geq a$ sont dans ${}^*I$,
   — si $I =]a, \ldots ,$ tous les x tels que $x \approx a$ et $x > a$ sont dans ${}^*I$,

— si $I =]-\infty, \ldots$, tous les infiniment grands négatifs sont dans ${}^*I$.
— si $I = \ldots, b]$, tous les x tels que $x \approx b$ et $x \leq b$ sont dans ${}^*I$;
— si $I = \ldots, b[$, tous les x tels que $x \approx b$ et $x < b$ sont dans ${}^*I$;
— si $I = \ldots, +\infty[$, tous les infiniment grands positifs sont dans ${}^*I$.
Sur la figure 4.2 on a représenté ${}^*[a, b[$.

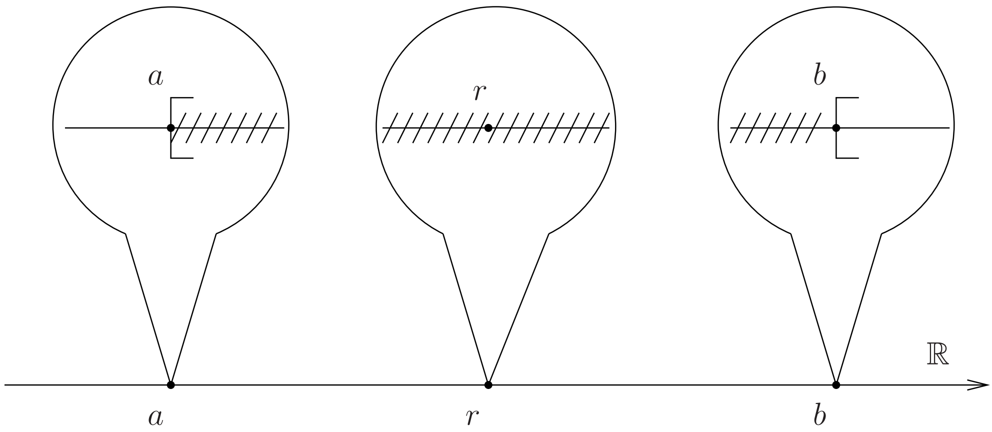


FIGURE 4.2: Représentation en hachuré de ${}^*[a, b[$.

La notation ${}^*I$ s'étend à d'autres intervalles de ${}^*\mathbb{R}$. En effet, si u, v sont des hyperréels tels que $u < v$, on définit les intervalles de ${}^*\mathbb{R}$ d'extrémités u, v comme on le faisait dans les réels mais en considérant comme éléments des nombres hyperréels, par exemple

$$ {}^*[u, v] = \{x \ : \ x \in {}^*\mathbb{R} \text{ et } u \leq x \leq v\} \ . $$

Si u, v sont réels on retrouve ainsi les intervalles considérés plus haut. Ainsi on distingue les intervalles de ${}^*\mathbb{R}$ des intervalles de $\mathbb{R}$ en utilisant une * .

4.8 Précautions à prendre en utilisant le Principe de transfert

On vient de se rendre compte de la force du Principe de transfert et cela se confirmera par la suite. Remarquons qu'une telle règle n'existe pas entre les diverses sortes de nombres rencontrés auparavant, ainsi
— entre naturels et entiers : les deux systèmes

$$ S(x) \ : x = 0 \qquad , \qquad S'(x) : \ x \leq 0 $$

sont équivalents dans $\mathbb{N}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$;
— entre entiers et rationnels : les systèmes

$$ S(x) \ : x = 0 \qquad , \qquad S'(x) \ : 0 \leq x < 1 $$

sont équivalents dans $\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$;

— entre rationnels et réels : les systèmes

$$S(x)\ : x^2 = 2 \qquad , \qquad S'(x)\ : x \neq x$$

sont équivalents dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{R}$;

— entre réels et complexes : les systèmes

$$S(x)\ : x^2 = -1 \qquad , \qquad S'(x) :\ x \neq x$$

sont équivalents dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{C}$.

Cela nous laisse déjà à penser que les "ressemblances" entre réels et hyperréels sont d'une autre nature que celles pouvant exister entre les nombres rencontrés précédemment.

Il faut aussi remarquer que **le Principe de transfert ne s'applique qu'à des systèmes standard**. Ainsi on trouve facilement des systèmes d'équations ou d'inéquations équivalents dans les réels et non équivalents dans les hyperréels. Voici deux exemples.

Soit ε un infiniment petit > 0 fixé. Considérons les formules :

$$S(x) :\ x = 0 \qquad , \qquad S'(x) :\ |x| \leq \varepsilon \qquad , \qquad S''(x) :\ \mathrm{st}(x) = 0\ .$$

$S(x)$ et $S'(x)$ sont équivalents dans $\mathbb{R}$ mais ne sont pas équivalents dans $^*\mathbb{R}$; cela ne contredit nullement le Principe de transfert puisque $S'(x)$ n'est pas un système standard du fait qu'il contient la constante non réelle ε. De même $S(x)$ et $S''(x)$ sont équivalents dans $\mathbb{R}$ et non équivalents dans $^*\mathbb{R}$. De nouveau cela ne contredit pas le Principe de transfert puisque $S''(x)$ n'est pas un système standard puisqu'il fait appel à la fonction $x \mapsto \mathrm{st}(x)$ qui ne peut être considérée comme l'extension standard d'une fonction réelle.

Par conséquent, **quand on applique le Principe de transfert, on doit être attentif à ce que les constantes rencontrées dans les systèmes représentent des réels et que les fonctions utilisées soient des extensions standard de fonctions réelles.** En particulier, on ne peut rencontrer dans les systèmes ni la fonction "*partie standard*" st, ni la relation "*infiniment proche*" $\approx$.

4.9 Exercices

1. Prouvez que l'extension standard d'une fonction réelle
   - paire (impaire) est paire (impaire)
   - périodique de période T est une fonction périodique de même période.
2. Prouvez
   (a) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x) = x$ dans $^*\mathbb{R}$,
   (b) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x)) = x$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$,
3. Au moyen d'un exemple montrer qu'on ne peut appliquer le Principe de transfert à des systèmes faisant appel à la relation $\approx$.

Chapitre 5

Dérivées et continuité

On a déjà introduit la notion de dérivée et cherché quelques dérivées classiques. Nous allons maintenant préciser la définition de la dérivée et obtenir les règles de dérivation usuelles. Nous allons aussi introduire la notion essentielle de continuité. Enfin, nous verrons les notions de limites qui sont en fait des abréviations de situations déjà observées dans ${}^*\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre f, g représentent des fonctions réelles d'une variable.

5.1 Définition de la dérivée

Considérons la fonction réelle $f : x \mapsto y = f(x)$ et soit x_0 la position initiale de la variable x, le nombre x_0 est un nombre réel. Supposons que $f(x)$ soit au moins définie dans un intervalle $[x_0, x_0 + h]$ ou $[x_0 - h, x_0]$ où h est un réel > 0.

On représente la variation de la variable x par une nouvelle variable Δx . Si $f(x)$ est définie des deux côtés de x_0 , on prend $\Delta x \neq 0$, si $f(x)$ est seulement définie à droite, on prend $\Delta x > 0$ et si $f(x)$ est seulement définie à gauche de x_0, on prend $\Delta x < 0$. La variation Δx induit une variation $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ de la variable y. On compare les variations Δy et Δx au moyen du **quotient différentiel** (noté QD) :

$$QD := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ .$$

L'idée est d'effectuer cette comparaison pour des variations Δx en valeur absolue très petites, ...de plus en plus petites. Pour rencontrer cela on considère des Δx infiniment petits non nuls. De la sorte on obtient une expression qui en général dépend de Δx et souvent fluctue d'une quantité infiniment petite suivant les variations de Δx, on veut dès lors gommer ces variations infiniment petites du quotient différentiel, et pour ce faire on prend la partie standard du quotient différentiel. De la sorte le résultat de la comparaison est un nombre réel. Bien entendu cela nécessite que la partie standard existe, autrement dit que le quotient différentiel soit limité. De là découle la définition de la dérivée :

Définition. *Soit x_0 un réel et $f(x)$ définie au moins dans un intervalle $[x_0, x_0 + h]$ ou $[x_0 - h, x_0]$ où h est un réel > 0. Alors f (ou $f(x)$) est **dérivable** en x_0 lorsque* *pour tout Δx infiniment petit non nul tel que $f(x_0+\Delta x)$ soit définie, le quotient différentiel*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

*est limité et a sa partie standard indépendante de Δx ; dans ces conditions la **dérivée** de f en x_0, notée $f'(x_0)$, est le nombre réel donné par*

$$\boxed{f'(x_0) := \mathrm{st}(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)} . \tag{5.1}$$

Le plus souvent lorsqu'on prend la dérivée en x_0 la fonction f est définie des deux côtés de x_0, alors la condition ci-dessus selon laquelle $f(x_0+\Delta x)$ est définie, est d'office vérifiée et donc superflue.

On comprend dès maintenant que

> *les dérivées vont être l'outil de base pour comparer des variations de grandeurs liées entre elles.*

Ainsi en reprenant l'exemple de la page 51, on peut dire que la vitesse du point mobile en t_0 est $e'(t_0)$. De même considérons une population (d'êtres vivants, de bactéries,...) dont l'effectif varie dans le temps, notons $n(t)$ le nombre d'individus de cette population à l'instant t. De nouveau soit Δt une variation de temps. Le taux de croissance moyen entre t_0 et $t_0+\Delta t$ est le rapport

$$\frac{n(t_0+\Delta t)-n(t_0)}{\Delta t} . \tag{5.2}$$

Pour estimer le taux de croissance instantané en t_0, on considère une variation Δt infiniment petite $\neq 0$ et on prend la partie standard de (5.2), autrement dit le taux de croissance instantané en t_0 est $n'(t_0)$.

Envisageons l'exemple suivant :

$$h(x) := \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} . \tag{5.3}$$

On sait déjà que h est dérivable en tout réel < 1 et en tout réel > 1. Envisageons maintenant la situation en 1. Soit Δx un infiniment petit $\neq 0$, on obtient

$$\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x} = 2+\Delta x & \text{si } \Delta x < 0 , \\ \frac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x} = 3+3\Delta x+\Delta x^2 & \text{si } \Delta x > 0 , \end{cases}$$

d'où la partie standard du quotient différentiel vaut 2 ou 3 suivant que Δx est < 0 ou > 0, la fonction h n'est donc pas dérivable en 1. Dans un cas pareil on utilise la **dérivée à droite et de dérivée à gauche** :

lorsqu'on considère la dérivée à droite, (resp. à gauche), dans la définition vue plus haut et dans la formule (5.1), on se limite à prendre des Δx infiniment petits > 0 (resp. < 0).

Ainsi la dérivée à gauche de h en 1 vaut 2 et la dérivée à droite de h en 1 vaut 3.

On considère aussi la *fonction dérivée* $\mathbf{f'}$, notée aussi $\mathbf{\frac{df}{dx}}$ (notation due à Leibniz) ou encore $\mathbf{Df}$. L'idée est simple : c'est la fonction obtenue en faisant varier le réel x_0 partout où la dérivée existe, autrement dit $f' : x \mapsto f'(x)$ où x remplace x_0 dans (5.1). Il faut être précis lorsqu'on se limite à un intervalle I de $\mathbb{R}$, par définition :

*f est **dérivable dans I** lorsque*

— *en chaque x_0 se trouvant à l'intérieur de I, la fonction f est dérivable en x_0,*
— *si $I = [a, \dots,$ la dérivée à droite de f en a existe,*
— *si $I = \dots, b]$, la dérivée à gauche de f en b existe.*

En se rappelant les dérivées calculées dès le chapitre 3 et au chapitre 4, nous avons :

- *si m est un naturel ≥ 1, alors x^m est dérivable dans $\mathbb{R}$ et $(x^m)' = mx^{m-1}$;*
- *$\frac{1}{x}$ est dérivable dans $]-\infty, 0[$ et dans $]0, +\infty[$ et $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$;*
- *$\sqrt{x}$ est dérivable dans $]0, +\infty[$ où $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;*
- *$\sin x$, $\cos x$ sont dérivables dans $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos' x = -\sin x$.*

Revenons à l'exemple 5.3 ci-dessus : h n'est pas dérivable en 1 mais
$h'(x) = 3x$ dans $[1, +\infty[$,
$h'(x) = 2x$ dans $]-\infty, 1[$ et aussi dans $]-\infty, 1]$.

Exemple 5.1. *En utilisant la définition de la dérivée, cherchons* $(\frac{1}{x^2+4x+3})'$

Résolution. Les racines de $x^2 + 4x + 3$ sont -1 et -3. Prenons x_0 réel différent de -1 et -3. Soit Δx ip $\neq 0$. Le quotient différentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} QD &= \frac{\frac{1}{(x_0+\Delta x)^2+4(x_0+\Delta x)+3} - \frac{1}{x_0^2+4x_0+3}}{\Delta x} \\ &= \frac{-2x_0 - 4 - \Delta x}{((x_0 + \Delta x)^2 + 4(x_0 + \Delta x) + 3)(x_0^2 + 4x_0 + 3)} \end{aligned}$$

Remarquons

$$\mathrm{st}(\text{dénominateur}) = \mathrm{st}(((x_0+\Delta x)^2+4(x_0+\Delta x)+3)(x_0^2+4x_0+3)) = (x_0^2+4x_0+3)^2 \neq 0$$

puisque $x_0 \neq -1$ et $x_0 \neq -3$. Le dénominateur du QD est donc appréciable, d'où le QD est de la forme $\frac{lim}{ap}$, le QD est donc limité et

$$\mathrm{st}(QD) = \frac{\mathrm{st}(-2x_0 - 4 - \Delta x)}{\mathrm{st}(((x_0 + \Delta x)^2 + 4(x_0 + \Delta x) + 3)(x_0^2 + 4x_0 + 3))} = \frac{-2x_0 - 4}{(x_0^2 + 4x_0 + 3)^2}\,.$$

Remarquons finalement que st(QD) est indépendant de Δx. En conclusion la dérivée existe en x_0 et vaut $\frac{-2x_0-4}{(x_0^2+4x_0+3)^2}$. En faisant varier x_0, on obtient :

$$(\frac{1}{x^2+4x+3})' = \frac{-2x-4}{(x^2+4x+3)^2} \text{ dans }]-\infty,-3[\cup]-3,-1[\cup]-1,+\infty[\,.$$

Exemple 5.2. *Dérivons $\sqrt{1-x^2}$ en utilisant la définition.*

Résolution. La fonction considérée est définie dans $[-1,1]$. Prenons x_0 réel dans $[-1,1]$ et soit Δx ip $\neq 0$. Le quotient différentiel s'écrit

$$\begin{aligned} QD &= \frac{\sqrt{1-(x_0+\Delta x)^2}-\sqrt{1-x_0^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{(1-(x_0+\Delta x)^2)-(1-x_0^2)}{\Delta x\,(\sqrt{1-(x_0+\Delta x)^2}+\sqrt{1-x_0^2})} \\ &= \frac{-2x_0-\Delta x}{\sqrt{1-(x_0+\Delta x)^2}+\sqrt{1-x_0^2}} \end{aligned}$$

Nous avons

$$\text{st(dénominateur)} = \text{st}(\sqrt{1-(x_0+\Delta x)^2}+\sqrt{1-x_0^2}) = 2\sqrt{1-x_0^2}\,. \qquad (5.4)$$

Deux cas se présentent :

1. Si x_0 est dans $]-1,1[$, l'expression (5.4) $\neq 0$, le QD est de la forme $\frac{lim}{ap}$, le QD est donc limité et

$$\text{st}(QD) = \frac{\text{st}(-2x_0-\Delta x)}{\text{st}(\sqrt{1-(x_0+\Delta x)^2}+\sqrt{1-x_0^2})} = \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\,,$$

   st(QD) est indépendant de Δx, par conséquent la dérivée existe en x_0 et vaut $\frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}$.

2. Si $x_0 = \pm 1$, le numérateur du QD, c-à-d $-2x_0-\Delta x$, est ap et, vu (5.4), le dénominateur correspondant est ip ; le QD est donc de la forme $\frac{ap}{ip}$ est est donc ig, par conséquent la fonction n'est pas dérivable en ± 1.

En conclusion

$$(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ dans }]-1,1[\,.$$

5.2 Exercices

En utilisant la définition de la dérivée, cherchez la dérivée des fonctions définies ci-dessous. Indiquez l'ensemble dans lequel la dérivée existe. Justifiez soigneusement sur base des propriétés des hyperréels.

$\dfrac{1}{2x+1}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
$\dfrac{3x+1}{x^2-9}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$
$\sqrt{x^2-4}$	$(x\sqrt{x})$
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{2x+1}$
$\sin(2x)$	$\cos(3x)$
$\sqrt{\sin x}$	$\sqrt{1+\sin(2x)}$

5.3 Théorème des accroissements infinitésimaux

Supposons f dérivable en x_0 et Δx infiniment petit $\neq 0$ tel que $f(x_0+\Delta x)$ soit définie. Vu la définition de la dérivée, il existe un infiniment petit ε tel que

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\varepsilon\,,$$

il s'ensuit

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f'(x_0)+\Delta x\cdot\varepsilon\,.$$

On vient ainsi de prouver :

Théorème 14 (Accroissements infinitésimaux, $1^{\text{ère}}$ partie)**.**
Soit f dérivable en un réel x_0. Pour tout Δx infiniment petit (tel que $f(x_0+\Delta x)$ soit définie), il existe un infiniment petit ε tel que

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x}$$

Ce résultat, très simple, est essentiel, on se rendra rapidement compte de son intérêt, on en verra plus tard une seconde et une troisième partie.

5.4 Continuité

A plusieurs reprises, on a remarqué la même chose :
soit x_0 un réel et $x\approx x_0$, alors

— si m un naturel $\neq 0$, on a $\mathrm{st}(x^m)=(\mathrm{st}(x))^m$ d'où $x^m\approx x_0^m$;
— si $x_0\neq 0$, le nombre x est appréciable et donc $\mathrm{st}(\frac{1}{x})=\frac{1}{\mathrm{st}(x)}$ d'où $\frac{1}{x}\approx\frac{1}{x_0}$;
— si $x_0,x\geq 0$, on a $\mathrm{st}(\sqrt{x})=\sqrt{\mathrm{st}(x)}$ d'où $\sqrt{x}\approx\sqrt{x_0}$;
— $\sin x\approx\sin x_0$ et $\cos x\approx\cos x_0$.

Pour représenter cela on introduit la notion de continuité :

Définition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction f (ou $f(x)$) est **continue dans I** lorsque la fonction f est définie dans I et lorsque pour tout réel x_0 dans I et tout x dans ${}^*I$,*

$$x\approx x_0 \text{ entraîne } f(x)\approx f(x_0)\,. \tag{5.5}$$

La condition ci-dessus revient à dire que pour tout x limité dans ${}^*I$ tel que $\mathrm{st}(x)$ est dans I, on a $\mathrm{st}(f(x)) = f(\mathrm{st}(x))$.

Des exemples envisagés plus haut il découle :

- *si m est un naturel, x^m est continu dans $\mathbb{R}$;*
- *$\frac{1}{x}$ est continu dans $]-\infty, 0[$ et dans $]0, +\infty[$;*
- *$\sqrt{x}$ est continue dans $[0, +\infty[$;*
- $\sin x$, $\cos x$ *sont continus dans* $\mathbb{R}$.

Parfois on s'intéresse à ce qui se passe plus particulièrement en un réel x_0, on parle alors de continuité en x_0 : *la fonction f est* ***continue en un réel*** *x_0 lorsque f est définie en x_0 et lorsque pour tout $x \approx x_0$ tel que $f(x)$ soit définie, on a $f(x) \approx f(x_0)$.*

Une première question se pose : quels sont les liens entre continuité et dérivabilité ? Utilisons le Théorème des accroissements infinitésimaux : si f est dérivable en un réel x_0 et si $x \approx x_0$, il existe ε ip tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon$$

d'où il découle $f(x) \approx f(x_0)$, ainsi :

$$\boxed{\textit{si } f \textit{ est dérivable en } x_0, \textit{ alors } f \textit{ est continue en } x_0\,.}$$

Mais **la réciproque n'est pas vraie**, ainsi on sait déjà que $\sqrt{x}$ est continue en 0 alors que $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Voyons qu'il en est de même pour $\sqrt[3]{x}$. Pour pouvoir traiter dès maintenant de $\sqrt[3]{x}$, admettons que tout nombre réel a une racine cubique (ce sera une conséquence du Théorème des valeurs intermédiaires vu au chapitre 10), il s'ensuit :

— $\sqrt[3]{x}$ est défini pour tout réel x et donc aussi pour tout hyperréel x,

— $x = (\sqrt{x})^3$ pour tout réel x et donc aussi pour tout hyperréel x.

Dès lors, en procédant comme on l'a fait pour la racine carrée (page 58) on déduit :

si x est ip, ap, ig, il en est de même de $\sqrt[3]{x}$ et, si x est limité, on a

$$\mathrm{st}(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{\mathrm{st}(x)}\,.$$

Il s'ensuit que $\sqrt[3]{x}$ est continue dans $\mathbb{R}$, en effet si x_0 est un réel et si $x \approx x_0$ on a $\mathrm{st}(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{\mathrm{st}(x)} = \sqrt{x_0}$. Dérivons $\sqrt[3]{x}$. Soient x_0 un réel et Δx ip $\neq 0$, le quotient différentiel s'écrit

$$\frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x})^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + (\sqrt[3]{x_0})^2}\,. \tag{5.6}$$

La partie standard du dénominateur de cette fraction vaut $3(\sqrt[3]{x_0})^2$. Si x_0 est un réel non nul, le dénominateur de (5.6) est donc appréciable, le quotient différentiel est donc l'inverse d'un appréciable, il est donc appréciable et

$$\mathrm{st}\Big(\frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x}\Big) = \frac{1}{\mathrm{st}((\sqrt[3]{x_0 + \Delta x})^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + (\sqrt[3]{x_0})^2)} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x_0})^2}\,.$$

Prenons maintenant $x_0 = 0$, le quotient différentiel s'écrit

$$\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2}$$

et est donc infiniment grand ! La dérivée n'existe donc pas en 0 . En conclusion :

$\sqrt[3]{x}$ est dérivable dans $\mathbb{R}_0$, n'est pas dérivable en 0 , alors que $\sqrt[3]{x}$ est continue dans $\mathbb{R}$ tout entier ; de plus dans $\mathbb{R}_0$

$$\boxed{(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} .$$

Voici donc un second exemple d'une fonction continue en un réel et non dérivable en ce réel. Un autre exemple de ce type est donné par $|x|$, en effet puisque, pour tout u limité on a $\mathrm{st}(|u|) = |\,\mathrm{st}(u)|$, la fonction $|x|$ est continue dans $\mathbb{R}$. Dérivons maintenant $|x|$: bien entendu on a $|x|' = 1$ dans $]0, +\infty[$ et $|x|' = -1$ dans $]-\infty, 0[$. Mais en 0 le quotient différentiel est

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{si } \Delta x < 0 \,, \end{cases}$$

la partie standard ne change rien et varie suivant le signe de Δx, par conséquent $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

On vient de remarquer que la continuité d'une fonction en un réel n'entraîne pas la dérivabilité de la fonction en ce point, soit que le quotient différentiel soit limité mais que sa partie standard dépende du choix de l'infiniment petit Δx, soit - plus grave encore - que le quotient différentiel soit infiniment grand.

On aimerait pouvoir dire qu'une fonction définie en un réel est toujours continue en ce réel, mais il n'en est pas ainsi. Par exemple considérons la fonction g définie par

$$g(x) := \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \,, \end{cases} \tag{5.7}$$

Cette fonction est continue dans $]-\infty, 2[$ et dans $[2, +\infty[$ car dans ces intervalles on a $g(x)$ respectivement égal à $x - 1$, $x + 1$, le problème se pose en 2 : si $x \approx 2$ et $x < 2$ on a

$$\mathrm{st}(g(x)) = \mathrm{st}(1 - x) = 1 \neq g(2) = 3$$

d'où $g(x) \not\approx g(2)$, la fonction g n'est donc pas continue en 2 . Ainsi

une fonction peut être définie en un réel et non continue en ce réel.

5.5 Règles de dérivation et de continuité

Somme, produit et fraction

Soient f, g continues dans un intervalle I et λ une constante réelle. Alors

$$\lambda \cdot f(x) \ , \ f(x) + g(x) \ , \ f(x) \cdot g(x) \ , \ |f(x)|$$

sont continues dans I. Si $g(x) \neq 0$ dans I, alors $f(x)/g(x)$ est aussi continue dans I.

Envisageons par exemple le cas du quotient. Soient $x_0 \in I$, $x \in {}^*I$ et $x \approx x_0$, alors $f(x) \approx f(x_0)$ et $g(x) \approx g(x_0) \neq 0$, les valeurs $f(x)$, $g(x)$ sont donc respectivement limitées, appréciables, la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est donc limitée et

$$\mathrm{st}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\mathrm{st}(f(x))}{\mathrm{st}(g(x))} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \ .$$

Envisageons maintenant les dérivées.

Soient $f(x)$, $g(x)$ dérivables dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et λ une constante réelle. Alors dans I, on a

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x) \quad , \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \ + \ f(x) \cdot g'(x) \ .$$

De plus si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors dans I

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \ .$$

Prouvons la règle concernant la dérivée de $f(x)/g(x)$. Soient $x_0 \in I$ et Δx un ip $\neq 0$ tel que $x_0 + \Delta x$ soit dans ${}^*I$. La fonction g est continue en x_0, d'où

$$\mathrm{st}(g(x_0 + \Delta x)) = g(x_0) \neq 0 \ . \tag{5.8}$$

Le quotient différentiel s'écrit :

$$QD = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \ . \tag{5.9}$$

Vu le Théorème des accroissements infinitésimaux, il existe des ip ε_1, ε_2 tels que

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$ et $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x$.

En remplaçant dans (5.9) on obtient

$$\begin{aligned} QD &= \frac{(f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot (g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) + \varepsilon_1 \cdot g(x_0) - \varepsilon_2 \cdot f(x_0)}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \end{aligned}$$

Vu (5.8), le quotient différentiel est le rapport d'un limité sur un appréciable, il est donc limité et

$$\begin{aligned}\mathrm{st}(QD) &= \frac{st(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) + \varepsilon_1 \cdot g(x_0) - \varepsilon_2 \cdot f(x_0))}{\mathrm{st}(g(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0))} \\ &= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} ,\end{aligned}$$

ce qui est bien indépendant de Δx, la règle est ainsi prouvée.

En appliquant ces résultats aux puissances x^m et à $\sin x$, $\cos x$, on obtient :

1. *Tout polynôme est dérivable dans $\mathbb{R}$ et toute fonction rationnelle est dérivable dans $\mathbb{R}$ excepté aux racines de son dénominateur.* On remarque encore que, si m est un naturel ≥ 1, on a dans $\mathbb{R}_0$

$$(x^{-m})' = -mx^{-m-1} ,$$

   la formule déjà vue pour les exposants m entiers ≥ 1, est aussi valable dans $\mathbb{R}_0$ pour les exposants entiers < 0 .

2. $\operatorname{tg} x$ *est dérivable dans chaque intervalle* $]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$ *(k entier) et*

$$\boxed{\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\operatorname{tg}^2(x) .}$$

   $\operatorname{cotg} x$ *est dérivable dans chaque intervalle* $]k\pi,(k+1)\pi[$ *(k entier) et*

$$\boxed{\operatorname{cotg}'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} .}$$

Fonction composée

Etant données deux fonctions f et g, on peut appliquer successivement ces deux fonctions : si on applique g et ensuite f, on obtient la **fonction composée** de g et de f définie par

$$x \longmapsto f(g(x)) ,$$

(cette fonction est aussi notée $f(g)$ ou $f \circ g$).

si $g(x)$ est continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, si $f(y)$ est continue dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et si $g(x) \in J$ quelque soit $x \in I$, alors $f(g(x))$ est continue dans I .

En effet, remarquons d'abord que, vu le Principe de transfert, $x \in {}^*I$ entraîne $g(x) \in {}^*J$; supposons maintenant $x_0 \in I$, $x \in {}^*I$ et $x \approx x_0$, alors $g(x) \approx g(x_0)$; puisque $g(x) \in {}^*J$ et $g(x_0) \in J$, on a $f(g(x)) \approx f(g(x_0))$.

La dérivée fait l'objet de la règle fondamentale suivante :

Dérivation d'une fonction composée
Soient $f(y)$ dérivable dans un intervalle J, $g(x)$ dérivable dans un intervalle I et supposons $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Alors $f(g(x))$ est dérivable dans I et

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \ .$$

Démonstration. Soient $x_0 \in I$ et Δx un ip $\neq 0$ tel que $x_0 + \Delta x \in {}^*I$. Le quotient différentiel de $f(g(x))$ en x_0 s'écrit

$$QD = \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} \tag{5.10}$$

Posons $y_0 := g(x_0)$ et $\Delta y := g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$.
g étant continue en x_0, la variation Δy est ip. Il existe donc un ip ε tel que

$$f(y_0 + \Delta y) - f(y_0) = \Delta y \cdot f'(y_0) + \varepsilon \cdot \Delta y \ .$$

En remplaçant dans (5.10), on a

$$QD = \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y \cdot f'(y_0) + \varepsilon \cdot \Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot f'(y_0) + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \varepsilon \ .$$

Il s'ensuit

$$\mathrm{st}(QD) = g'(x_0) \cdot f'(y_0) + g'(x_0) \cdot 0 = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \ .$$

□

Exemple 5.3. *Cherchons où $\sqrt{2 \sin x - 1}$ est continu, dérivable et cherchons la dérivée.*

Résolution. Remarquons que la fonction considérée est périodique de période 2π , on peut d'abord l'étudier dans $[-\pi, \pi]$ et ensuite en déduire la situation dans $\mathbb{R}$. La fonction $\sqrt{y}$ est dérivable dans $]0, +\infty[$, continue dans $[0, +\infty[$; la fonction $2 \sin x - 1$ est dérivable dans $\mathbb{R}$. Pour la dérivée, il suffit donc de se placer dans l'ensemble des x tels que $1/2 < \sin x$; ainsi $\sqrt{2 \sin x - 1}$ est dérivable dans l'intervalle $]\pi/6, 5\pi/6[$ et donc aussi dans chaque intervalle $]\pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi[$, k variant parmi tous les entiers. On a

$$\sqrt{2 \sin x - 1}' = \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} \right)_{y = 2 \sin x - 1} \cdot (2 \cos x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x - 1}} \ .$$

Pour la continuité, il faut se placer dans l'ensemble des x tels que $1/2 \leq \sin x$; ainsi $\sqrt{1 - 2 \sin x}$ est continue dans l'intervalle $[\pi/6, 5\pi/6]$ et donc aussi dans chaque intervalle $[\pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi]$, k variant parmi tous les entiers.

Attention à ce qu'on écrit ! Ainsi $f'(2x)$ représente la valeur de la fonction f' en $2x$ et non la dérivée de $f(2x)$, cette distinction est importante car

$$(f(2x))' \ = \ 2 \cdot f'(2x) \neq f'(2x) \ .$$

Utilisons la règle de dérivation d'un produit de composition pour *dériver les fonctions donnant le sinus et le cosinus de l'angle orienté dont la mesure est x degrés*, notons :

$$\begin{array}{rcl} sin_d(x) & := & \text{sinus de l'angle orienté dont la mesure est } x \text{ degré,} \\ cos_d(x) & := & \text{cosinus de l'angle orienté dont la mesure est } x \text{ degré.} \end{array}$$

Bien entendu

$$sin_d(x) = \sin(\frac{\pi}{180}x) \text{ et } cos_d(x) = \cos(\frac{\pi}{180}x) \ ,$$

d'où

$$sin_d'(x) = \frac{\pi}{180}cos_d(x) \text{ et } cos_d'(x) = -\frac{\pi}{180}sin_d(x) \ !$$

On comprend dès lors **l'intérêt de mesurer les angles en radians : cela est indispensable si on veut utiliser les formules classiques de dérivation**. Mais *pourquoi les radians ?* La raison est simple : pour dériver la fonction sinus on a utilisé le résultat selon lequel $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1$ pour ε infiniment petit non nul. Si maintenant on retourne à la preuve de ce résultat, on voit qu'on y a utilisé la formule donnant l'aire d'un secteur circulaire et bien entendu dans cette formule il fallait que l'angle au centre soit mesuré en radians.

5.6 Exercices

1. En utilisant les règles vues plus haut, déterminez où sont continues, dérivables les fonctions suivantes et cherchez leurs dérivées.

$$\begin{array}{l|l} f_1(x) := \dfrac{x^2-16}{x-3} & f_2(x) := \sin(2x-3) \\ & \\ f_3(x) := \sqrt{3-2\sin x} & f_4(x) := \sqrt{x^2-4} \\ f_5(x) := \sqrt[3]{1-x^2} & f_6(x) := \sqrt[3]{2\sin x - 1} \\ f_7(x) := \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1} & f_8(x) := \dfrac{\cos x}{2\sin x - 1} \\ f_9(x) := \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} & f_10(x) := \dfrac{1}{\sqrt{\cos x + 2\sin x}} \end{array}$$

2. Où sont continues, dérivables les fonctions suivantes :

$$f_{11}(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 2-x^2 & \text{si } |x| < 1 \end{cases} \quad , \quad f_{12}(x) := \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } |x| < 2 \\ x+2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} .$$

5.7 Continuité des fonctions monotones

Soit f une fonction réelle définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Rappelons que f est dite *croissante* (resp. *décroissante*) dans I lorsque pour tous u, v dans I tels que $u < v$ on a $f(u) \leq f(v)$ (resp. $f(u) \geq f(v)$). Rappelons qu'il en est alors de même de f dans ${}^*I$ (voir page 59). La fonction f est dite *monotone* dans I lorsqu'elle est croissante dans I ou lorsqu'elle est décroissante dans I.

Théorème 15 (Continuité des fonctions monotones).
Si f est monotone dans un l'intervalle I et si l'image de I par f, c'est-à-dire l'ensemble $\{f(x)\ :\ x \in I\}$, est un intervalle, alors f est continue dans I.

Démonstration. Envisageons le cas où $f(x)$ est croissante dans I. Soit x_0 un réel dans I. Prenons $x \approx x_0$ et $x \in {}^*I$. Envisageons par exemple le cas $x_0 < x$. Alors forcément x_0 ne peut être l'extrémité supérieure de l'intervalle I. On peut donc trouver x_1 dans I tel que $x_0 < x_1$. Il s'ensuit $x_0 < x < x_1$ et donc $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$. La valeur $f(x)$ est donc limitée.

Supposons $f(x) \not\approx f(x_0)$. Alors on pourrait trouver un réel y_2 tel que $f(x_0) < y_2 < f(x) \leq f(x_1)$. L'image de I par f étant un intervalle, ce nombre réel y_2 devrait être une valeur $f(x_2)$ où x_2 serait dans I. Ainsi

$$f(x_0) < f(x_2) < f(x) \leq f(x_1)$$

Puisque f est monotone dans ${}^*I$, on aurait forcément $x_0 < x_2 < x$ et donc $x_0 \approx x_2 \approx x$. Mais cela est impossible car x_0, x_2 étant réels cela entraînerait $x_0 = x_2$ ce qui contredirait $x_0 < x_2$. En conclusion $f(x) \approx f(x_0)$. □

Le résultat ci-dessus nécessite que $f(x)$ opère entre des intervalles, en effet ci-dessus on a utilisé une propriété qui peut paraître anodine mais qui en fait est caractéristique des intervalles de $\mathbb{R}$: tout nombre compris entre deux éléments d'un intervalle, est lui-même dans l'intervalle, autrement dit, *"dans un intervalle il n'y a pas de trous"*.

Application à $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$

Les fonctions $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ vérifient les hypothèses du théorème. Ainsi
- — $\arcsin x$ est strictement croissant dans $[-1, 1]$ et l'image de $[-1, 1]$ est l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$,
- — $\operatorname{arctg} x$ est strictement croissant dans $\mathbb{R}$ et l'image de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

Par conséquent

$\arcsin x$ *est continu dans* $[-1, 1]$ *et* $\operatorname{arctg} x$ *est continu dans* $\mathbb{R}$.

Maintenant dérivons $\arcsin x$. Prenons x_0 dans $]-1, 1[$. Soit Δx ip $\neq 0$, on a

$$QD_{arcsin} = \frac{\arcsin(x_0 + \Delta x) - \arcsin(x_0)}{\Delta x}\ .$$

Posons $y_0 = \arcsin(x_0)$ et $y_0 + \Delta y = \arcsin(x_0 + \Delta x)$. Alors $\frac{-\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$ et, vu la continuité de $\arcsin x$, la variation Δy est ip ; de plus $x_0 = \sin(y_0)$ et $x_0 + \Delta x_0 = \sin(y_0 + \Delta y)$. Nous avons donc

$$QD_{arcsin} = \frac{\Delta y}{\sin(y_0 + \Delta y) - \sin(y_0)} = \frac{1}{QD_{sin}} \quad \text{avec } QD_{sin} = \frac{\sin(y_0 + \Delta y) - \sin(y_0)}{\Delta y}\ .$$

Puisque $\operatorname{st}(QD_{sin}) = \cos(y_0) \neq 0$, le dénominateur QD_{sin} est ap et par conséquent

$$\operatorname{st}(QD_{arcsin}) = \frac{1}{\operatorname{st}(QD_{sin})} = \frac{1}{cos(y_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}\ .$$

On raisonnerait de la même façon pour $\operatorname{arctg}(x)$. Ainsi arcsin x *est dérivable* $]-1,1[$ *et* arctg x *est dérivable dans* $\mathbb{R}$, *et*

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}\ .}$$

Ce que nous faisons de faire pour arcsin x, on pourra le faire plus généralement pour la réciproque d'une fonction monotone dans un intervalle.

5.8 Limites de fonctions

Lorsqu'on a dérivé sin x, on a prouvé que si ε est un infiniment petit non nul, la fraction $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1$, autrement dit $x \approx 0$ et $x \neq 0$ entraîne $\frac{\sin x}{x} \approx 1$, pour exprimer cela on dit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ .$$

Les limites sont donc des abréviations pour représenter des situations particulières bien précises concernant $f(x)$ pour $x \approx a$ et $\neq a$, en ajoutant parfois la condition $x > a$ (limite à droite) ou $x < a$ (limite à gauche). En général, si a et L sont des réels, on définit :

*la **limite** de $f(x)$ pour x tendant vers a est L, en abrégé $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, lorsque pour tout $x \approx a$ tel que $x \neq a$ et $f(x)$ soit définie, on a $f(x) \approx L$.*

Si ci-dessus on remplace $x \neq a$ par $x > a$ (resp. $x < a$), on parle de **limite à droite** (resp. **limite à gauche**) en a et on écrit alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$ (resp. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = L$).

Reprenons l'exemple de la fonction g définie à la page 5.7, nous avons vu que $g(x)$ est continue dans $]-\infty, 2[$ et dans $[2, +\infty[$ et que

$$(\, x \approx 2 \text{ et } x < 2\,) \text{ entraîne } g(x) \approx 1\ ,$$

on peut donc résumer cela en utilisant la limite à gauche de $g(x)$ en 2 en écrivant :

$$\lim_{x\to 2-} g(x) = 1\ .$$

Complétons ce qu'on sait à propos de arctg x. On sait déjà que arctg x est continu dans $\mathbb{R}$, prenons maintenant la variable x infiniment grande. Pour tout réel $x > 0$ on a $0 < \operatorname{arctg}(x) < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x$. D'après le Principe de transfert il en est de même pour tout hyperréel x . Prenons H ig > 0. On a donc $0 < \operatorname{arctg}(H) < \frac{\pi}{2}$ d'où

$$0 \leq \operatorname{st}(\operatorname{arctg} H) \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

Si la partie standard de arctg H était un réel $r < \frac{\pi}{2}$, on aurait $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(H)) \approx \operatorname{tg} r$ et donc $H \approx \operatorname{tg} r$, ce qui est impossible puisque tg r est un réel. Par conséquent

$$\operatorname{st}(\operatorname{arctg}(H)) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Ainsi H ig > 0 entraîne $\operatorname{arctg}(H) \approx \frac{\pi}{2}$, de même H ig < 0 entraîne $\operatorname{arctg}(H) \approx -\frac{\pi}{2}$. On peut exprimer cela dans le langage des limites, dans ce cas on écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}} \,.$$

Ainsi, si L est un réel, on définit :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *(resp.* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$*) lorsque pour tout* x *infiniment grand* > 0 *(resp.* < 0*) , on a* $f(x) \approx L$ *.*

De même, si x est infiniment grand > 0 ou < 0, on a $\frac{2x+1}{x-1} \approx 2$, ce qu'on résume par

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \ \text{ et } \ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \,.$$

On peut également considérer le cas où $f(x)$ est infiniment grand. Par exemple, si $x \approx 1$ et $x \neq 1$, on a $\frac{1}{1-x}$ ig, ce qu'on résume par

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = \infty \,;$$

mais on peut être plus précis, si $x \approx 1$ et $x > 1$ (resp. $x < 1$), on a $\frac{1}{1-x}$ ig < 0 (resp. > 0), ce qu'on traduit par

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = -\infty \ \text{ et } \ \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = +\infty \,.$$

Ainsi, si a est un réel, on définit :

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *(resp.* $+\infty, -\infty$*) lorsque pour tout* $x \approx a$*,* $x \neq a$ *et* x *dans l'ensemble de définition de* f*, on a* $f(x)$ *infiniment grand (resp. infiniment grand* > 0*, infiniment grand* < 0*).*

On adapte aussi cette définition à la limite à droite $\lim_{x\to a+} f(x)$ (resp. à la limite à gauche $\lim_{x\to a-} f(x)$) en prenant alors seulement des $x \approx a$ et $x > a$ (resp. $x < a$). Enfin on peut également combiner ces abréviations et avoir par exemple $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ainsi puisque pour tout x ig > 0, l'expression $\frac{1-x^2}{x+2}$ est un ig < 0, on écrit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x+2} = -\infty \,.$$

Exemple 5.4. *Que peut-on dire de la continuité et des limites complémentaires de la fonction* $x \mapsto \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$ *?*

Solution. Vu la règle de composition des fonctions continues $\operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$ est continue dans $]-\infty, 0[$ et dans $]0, +\infty[$. Soit $x \approx 0$ et $x \neq 0$.
$\frac{1}{x}$ est un ig. Deux cas se présentent :

— si $x > 0$ alors $1/x$ est un ig > 0 et donc $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \approx \frac{\pi}{2}$,
— si $x < 0$ alors $1/x$ est un ig < 0 et $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \approx -\frac{\pi}{2}$.
Il s'ensuit

$$\lim_{x \to 0-} \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \to 0+} \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} .$$

Enfin si x est ig, on a $\frac{1}{x} \approx 0$ et vu la continuité de l'arctg on a $\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) \approx 0$, autrement dit

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) = 0 .$$

5.9 Du “dessin” aux hyperréels et inversément

Nous allons maintenant raisonner sur des fonctions données au moyen de leur graphe. Du tracé du graphe dans l'espace réel nous allons déduire comment la fonction se comporte dans les hyperréels. Convenons de marquer d'un point plus gros les extrémités du graphe comprises dans celui-ci.

Exemple 5.5. *Déterminons où la fonction f dont le graphe est tracé sur la figure 5.1 est continue.*

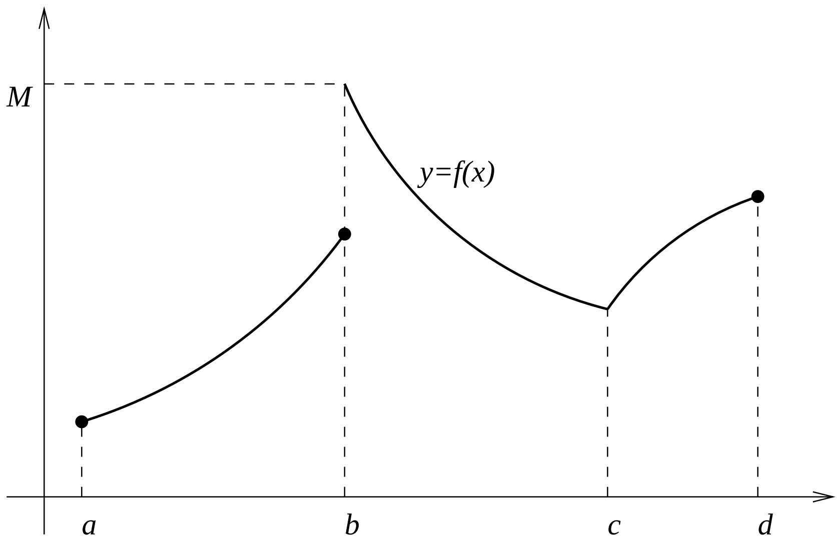


FIGURE 5.1

Solution. Utilisons le Théorème de continuité des fonctions monotones : f est croissante dans $[a, b]$ et l'image de cet intervalle par f est l'intervalle $[f(a), f(b)]$, elle est donc continue dans $[a, b]$. De même f est continue dans $]b, c]$ et dans $[c, d]$.

De plus f est continue en c car si $x \approx c$ et $x < c$ (resp. $x > c$) on a $f(x) \approx f(c)$ vu la continuité de f dans $]b, c]$ (resp. $[c, d]$). Par conséquent f est continue dans $]b, d]$.

Mais f n'est pas continue en b car $u \approx b$ et $u > b$ entraîne $f(u) \approx M \neq f(b)$. Autrement dit

$$\lim_{x \to b+} f(x) = M \,.$$

Ci-dessus on prétend que $f(u) \approx M$ pour $u \approx b$ et $u > b$, cela est sans doute intuitivement clair, prouvons-le, cela demande un peu de soin. Considérons la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} M \text{ si } x = b \\ f(x) \text{ si } b < x \leq c \end{cases} \,,$$

d'après le Théorème de continuité des fonctions monotones, la fonction g est continue dans $[b, c]$, de plus $f(x) = g(x)$ pour tout x dans $]b, c]$ et donc aussi pour tout x dans $^*]b, c]$; prenons $u \approx b$ et $u > b$, on a donc $g(u) \approx M$ et $f(u) = g(u)$, et donc $f(u) \approx M$.

Une fonction comme celle que nous venons de rencontrer dans cet exemple est dite *continue par morceaux* dans $[a, d]$, de façon plus générale :

Définition. *Une fonction f est* ***continue par morceaux*** *dans $[a, b]$ lorsqu'on peut trouver des réels $a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}$ tels que*

— $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$

— *f est continue dans chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$,*

— *les limites à gauche en $a_1, \ldots,$ a_{n+1} et les limites à droite en $a_0, \ldots,$ a_n existent et sont des réels.*

Dans ce cas, pour $k = 0, 1, \ldots, n$, la fonction f_k définie par

$$f_k(x) := \begin{cases} \lim_{x \to a_k+} f(x) & \text{si } x = a_k \,, \\ f(x) & \text{si } a_k < x < a_{k+1} \,, \\ \lim_{x \to a_{k+1}-} f(x) & \text{si } x = a_{k+1} \,, \end{cases}$$

est continue dans $[a_k, a_{k+1}]$ et est égale à f dans $]a_k, a_{k+1}[$, cette fonction f_k sera appelée le **prolongement continu de f à** $[a_k, a_{k+1}]$.

Interprétation graphique de la continuité

L'interprétation graphique de la continuité est simple :

si une fonction f est continue dans un intervalle I et si nous pouvons tracer le graphe[1] *de $f(x)$ pour x dans I, alors ce graphe de f se trace d'un seul trait.*

En effet si en une abscisse x_0 dans l'intérieur de I, on devait lever la pointe du "crayon" pour tracer le graphe, on a une situation comme celle illustrée sur la figure 5.2, dans ce cas on a $y_2 = f(x_0)$. Puisque nous avons admis qu'on pouvait tracer le graphe de f dans I, cette fonction devrait être monotone dans un intervalle (éventuellement très petit) de la forme $[x_1, x_0[$. Alors, en raisonnant comme ci-dessus, on considère la fonction g définie par

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_0 \,, \\ y_1 & \text{si } x = x_0 \,, \end{cases}$$

1. concernant le fait de pouvoir tracer le graphe, voir l'exercice 4.

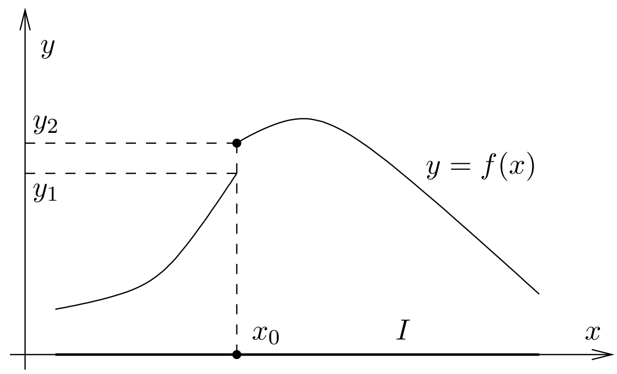


FIGURE 5.2

$g(x)$ est continue dans $[x_1, x_0]$ et $f(x) = g(x)$ pour tout x tel que $x_1 \leq x < x_0$, en prenant un $u \approx x_0$ et $u < x_0$, on a

$$f(u) = g(u) \approx y_1 \neq f(x_0)$$

et donc $f(u) \not\approx f(x_0)$, la fonction ne peut alors être continue en x_0.

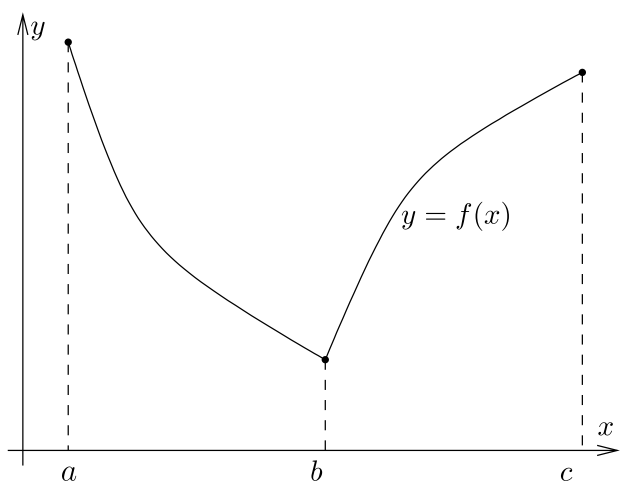
5.10 Exercices

1. Soit f définie par

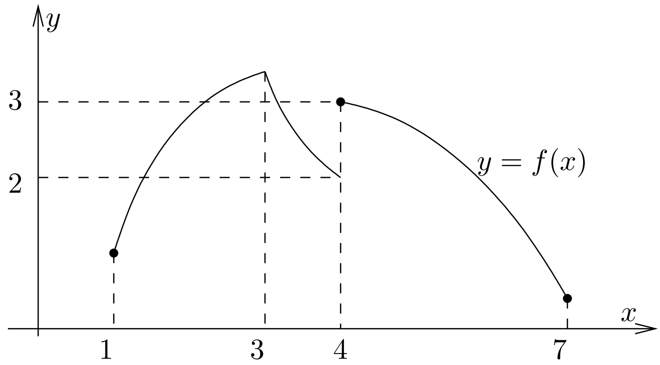
$$f(x) := \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Où la fonction f est-elle continue, dérivable ? Justifiez.

2. Où la fonction f dont le graphe est tracé ci-dessous est-elle continue ? Justifiez.



3. On considère la fonction f dont le graphe est tracé ci-dessous.



1. Où f est-elle continue ?
2. Soit ε un ip > 0. Quelles sont les parties standard de $f(4+\varepsilon)$ et $f(4-\varepsilon)$.

4. **Peut-on toujours tracer complètement le graphe d'une fonction continue dans un intervalle bornée ?** Cela peut surprendre mais la réponse est **non**. Pour s'en rendre compte considérez les deux fonctions suivantes.

$$f_1(x) := \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) := \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Prouvez que $f_1(x)$ est continue dans $\mathbb{R}$ et que $f_2(x)$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ (pour prouver l'existence de la dérivée en 0 utilisez la définition).

Dans $]0,1]$, les graphes de f_1 et f_2 coupent Ox en $x_k = \frac{1}{k\pi}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$. Ces abscisses tendent vers 0 et la distance entre x_k et x_{k+1} tend aussi vers 0, il est dès lors impossible de tracer le graphe dans $[0,1]$, on peut le faire dans tout intervalle $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$, mais le tracé matériel ne peut atteindre 0. Pourtant f_1 est continue et f_2 est dérivable dans $\mathbb{R}$!

Chapitre 6

Ordres de grandeur, différentielles

Au chapitre précédent nous avons déjà rencontré la différentielle à l'occasion du Théorème des accroissements infinitésimaux et de la formule

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot \varepsilon \qquad . \tag{6.1}$$

Pour comprendre l'intérêt de cette formule réfléchissons d'abord à la notion d'ordre de grandeur.

6.1 Ordres de grandeur

Parmi tous les nombres on distingue trois ordres de grandeur absolus :

— les infiniment grands,

— les appréciables,

— les infiniment petits.

Le plus souvent, la notion d'ordre de grandeur n'est pas absolue mais relative à une grandeur fixée. Soit u un nombre hyperréel $\neq 0$ fixé, c'est notre point de repère, notre valeur "étalon". Pour comparer un nombre v à u on effectue le rapport v/u et on observe quel est l'ordre de grandeur absolu de ce rapport, trois cas se présentent donc :

— le rapport v/u est infiniment petit, on dit que v est **négligeable par rapport à $\boldsymbol{u}$**, en abrégé v est $\boldsymbol{o(u)}$,

— le rapport v/u est appréciable, on dit que u et v **ont le même ordre de grandeur**,

— le rapport v/u est infiniment grand, autrement dit u/v est infiniment petit c'est-à-dire u est $o(v)$.

Lorsque le rapport v/u est limité on dit que v est $\boldsymbol{O(u)}$, ce qu'on lit v de l'**ordre de** u .

Ainsi les trois cas ci-dessus deviennent respectivement :

— v est $o(u)$ (et forcément alors $O(u)$),

— v est $O(u)$ mais n'est pas $o(u)$,
— v n'est pas $O(u)$ et alors forcément u est $o(v)$.

Lorsque u est appréciable, les nombres qui sont $o(u)$, resp. $O(u)$, sont exactement les infiniment petits, resp. les limités, la classification ci-dessus n'apporte alors rien de neuf. Les notions $o(u)$, $O(u)$ n'ont donc d'intérêt que lorsque u est infiniment petit ou infiniment grand. On va maintenant appliquer ces notions en prenant pour u une valeur Δ infiniment petite. Cela va permettre de mieux comprendre des pratiques courantes au niveau des applications. Ainsi l'ingénieur qui étudie un phénomène soumis à une variation Δ très petite d'un paramètre va dans certaines circonstances considérer comme négligeables des quantités de la forme Δ^2 , Δ^3 ; en fait l'ingénieur considère alors comme négligeables les quantités qui sont $o(\Delta)$, cela suppose que Δ est suffisamment petit que pour pouvoir être assimilé à un infiniment petit.

Dans ce qui suit Δ représente toujours un infiniment petit non nul. Pour plus de commodité, dans les exemples on prendra $\Delta > 0$. Le nombre Δ va devenir notre valeur étalon qu'on va utiliser lorsqu'on compare des grandeurs infiniment petites. Soit ε un infiniment petit. Trois possibilités se présentent donc :

1. *Le rapport ε/Δ est infiniment petit, c'est-à-dire ε est $o(\Delta)$.*
   C'est ce qui arrive par exemple si on prend pour ε un des nombres suivants :
   $$\Delta^2,\ 7\Delta^3,\ \Delta^{3/2},\ 10^6\Delta^2,\ 3\Delta^2 - 100\Delta^3,\ 1000\Delta^3 - 100\Delta^4,\ \ldots$$
   Les nombres qui sont $o(\Delta)$ sont de la forme $\mathbf{IP} \cdot \boldsymbol{\Delta}$.
2. *Le rapport ε/Δ est appréciable, c'est-à-dire ε et Δ ont le même ordre de grandeur, ou ce qui est équivalent ε est $O(\Delta)$ et n'est pas $o(\Delta)$.*
   Par exemple il en ainsi lorsque ε un des nombres suivants :
   $$3\Delta,\ 3\Delta + 7\Delta^2,\ -2\Delta + 8\Delta^3,\ 1000\Delta - 5\Delta^{3/2},\ \ldots$$
   Ces nombres sont de la forme $\mathbf{AP} \cdot \boldsymbol{\Delta}$.
3. *le rapport ε/Δ est infiniment grand, alors ε n'est pas $O(\Delta)$.*
   C'est par exemple le cas de
   $$\sqrt{\Delta},\ \sqrt[3]{\Delta},\ \Delta^{2/3},\ldots.$$

Les nombres qui sont $O(\Delta)$ reprennent les cas 1 et 2 ci-dessus, ils sont de la forme $\mathbf{LIM} \cdot \boldsymbol{\Delta}$.

Remarquons :

1. *La somme de deux nombres $O(\Delta)$ (resp. $o(\Delta)$), est $O(\Delta)$ (resp. $o(\Delta)$), en abrégé*
   $$\boxed{O(\Delta) + O(\Delta) = O(\Delta) \qquad , \qquad o(\Delta) + o(\Delta) = o(\Delta)}\ .$$
2. *Le produit d'un nombre $O(\Delta)$ (resp. $o(\Delta)$), par un limité est $O(\Delta)$ (resp. $o(\Delta)$), en abrégé*
   $$\boxed{O(\Delta) \cdot LIM = O(\Delta) \quad , \quad o(\Delta) \cdot LIM = o(\Delta)}\ .$$

3. *Le produit d'un nombre* $O(\Delta)$ *par un ip est* $o(\Delta)$ *, en abrégé*

$$\boxed{O(\Delta) \cdot IP = o(\Delta)} \; .$$

4. *Si* m, n *sont des naturels non nuls tels que* $m < n$*, alors tout ip* $O(\Delta^n)$ *est* $o(\Delta^m)$ *.*

En effet, si $m < n$ et si ε est $O(\Delta^n)$, alors

$$\varepsilon = LIM \cdot \Delta^n = (LIM \cdot \Delta^{n-m}) \cdot \Delta^m = IP \cdot \Delta^m \; .$$

Exercice 6.1. *Montrons* $O(\Delta) + O(\Delta^2) = O(\Delta)$ *et* $O(\Delta) \cdot o(\Delta^2) = o(\Delta^3)$ *.*

Solution. En effet
1. $O(\Delta) + 0(\Delta^2)$ est un cas particulier de $O(\Delta) + O(\Delta)$ et est donc $O(\Delta)$.
2. On a

$$O(\Delta) \cdot o(\Delta^2) = (LIM \cdot \Delta) \cdot (IP \cdot \Delta^2) = IP \cdot \Delta^3 = o(\Delta^3) \; .$$

On peut appliquer les notions d'ordre de grandeur à des nombres infiniment proches, ainsi si $u \approx v$, on peut distinguer trois niveaux de "proximité" :
— *le plus faible* : $v - u$ n'est pas $O(\Delta)$, par exemple $2 \approx 2 + \sqrt{\Delta}$ et $\sqrt{\Delta}$ n'est pas $O(\Delta)$;
— *le plus fort* : $v - u$ est $o(\Delta)$, on dit alors que u et v sont **infiniment proches par rapport à** Δ, ce qu'on note $\boldsymbol{u \approx_\Delta v}$. Par exemple $2 \approx_\Delta 2 + 5\Delta^2$ mais $2 \not\approx_\Delta 2 + \Delta$.
— *le niveau intermédiaire* : $v - u$ est $O(\Delta)$ et n'est pas $o(\Delta)$, c'est le cas par exemple des nombres 2 , $2 + \Delta$, $2 + 3\Delta$.

6.2 Différentielle

Considérons une fonction réelle $f(x)$. Soient f dérivable en x_0 et Δx infiniment petit $\neq 0$. Vu la première partie du Théorème des accroissements infinitésimaux, il existe un infiniment petit ε tel que

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \; .$$

Remarquons que la variation de la fonction $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ est $O(\Delta x)$. De plus $\varepsilon \cdot \Delta x$ est $\mathrm{o}(\Delta x)$. Ainsi

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \mathrm{o}(\Delta x) \; . \tag{6.2}$$

L'expression $f'(x_0) \cdot \Delta x$ **permet donc d'évaluer la variation de la fonction en commettant une erreur négligeable par rapport à** Δx, d'où son importance. Cette expression s'appelle la différentielle de f en x_0 ; précisons cette définition :

Définition. *Si* f *est dérivable en un réel* x_0*, la* ***différentielle de*** $\boldsymbol{f}$ ***en*** $\boldsymbol{x_0}$*, notée* $\mathrm{d}\boldsymbol{f_{x_0}}$ *, est la fonction*

$$\Delta x \longmapsto f'(x_0) \cdot \Delta x \; ,$$

autrement dit

$$\boxed{\mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x) := f'(x_0) \cdot \Delta x} \; .$$

La différentielle est une fonction de la variable Δx particulièrement simple : le produit d'une constante et de Δx, difficile d'avoir une dépendance plus simple !

Reprenons (6.2) en supposant que Δ est un infiniment petit $\neq 0$ et que Δx est $O(\Delta)$. Comparons $\varepsilon \cdot \Delta x$ avec Δ :

$$\frac{\varepsilon \cdot \Delta x}{\Delta} = \varepsilon \cdot \frac{\Delta x}{\Delta} = \varepsilon \cdot \ \text{LIM} \ = \ \text{IP} \ ,$$

par conséquent $\varepsilon \cdot \Delta x$ est $o(\Delta)$ et

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta) = O(\Delta) \ . \tag{6.3}$$

Les résultats (6.2) et (6.3) sont essentiels, ils prolongent le Théorème des accroissements infinitésimaux vu à la page 69 :

Théorème 16 (Théorème des accroissements infinitésimaux, 2e partie)**.**
Soit f dérivable en un réel x_0.

1. *Pour tout Δx infiniment petit non nul, la variation $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ est $O(\Delta x)$ et*

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x) + o(\Delta x)} \ . \tag{6.4}$$

2. *Soit Δ un infiniment petit $\neq 0$. Alors pour tout Δx qui est $O(\Delta)$, la variation $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ est $O(\Delta)$ et*

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x) + o(\Delta)} \ , \tag{6.5}$$

ou encore

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx_\Delta \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x)} \ , \tag{6.6}$$

Par exemple, si nous supposons que Δx est $O(\Delta)$ et si x_0 est un réel,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} &= -\frac{\Delta x}{x_0^2} + o(\Delta) \text{ si } x_0 \neq 0 \ , \\ \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) &= \cos x_0 \cdot \Delta x + o(\Delta) \ , \\ \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} &= \frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}} + o(\Delta) \quad \text{si } x_0 > 0 \ . \end{aligned}$$

Particularisons x_0 et Δx (en prenant ce dernier $O(\Delta)$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 2\Delta} &= 1 - 2\Delta + o(\Delta); , \\ \sin(3\Delta + \Delta^2) &= 3\Delta + \Delta^2 + o(\Delta) = 3\Delta + o(\Delta) \ , \\ \sqrt{3 + 5\Delta - 3\Delta^2} - \sqrt{3} &= \frac{5\Delta - 3\Delta^2}{2\sqrt{3}} + o(\Delta) = \frac{5\Delta}{2\sqrt{3}} + o(\Delta) \ . \end{aligned}$$

Autrement dit, si on accepte de faire une erreur qui soit $o(\Delta)$, on peut évaluer $\frac{1}{1+2\Delta}$ par $1 - 2\Delta$, $\sin(3\Delta + \Delta^2)$ par 3Δ et $\sqrt{3 + 5\Delta - 3\Delta^2}$ par $\sqrt{3} + \frac{5\Delta}{2\sqrt{3}}$.

Ainsi, **pour autant qu'on puisse assimiler Δ à un infiniment petit et que la variation de la variable soit $O(\Delta)$, la différentielle va permettre d'évaluer la variation de la fonction en commettant une erreur qui soit négligeable par rapport à Δ.**

Pourquoi remplacer la variation de la fonction par la différentielle ?
Pour deux raisons : pour autant qu'on connaisse la dérivée, la différentielle se calcule très facilement mais surtout la différentielle est bien plus commode à utiliser que la variation de la fonction. Ainsi, en général la variation Δy n'est pas proportionnelle à Δx, par exemple, si nous prenons $g(x) := x^2$, on obtient $\Delta y = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$ qui n'est pas proportionnelle à Δx, de même $\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)$ n'est pas proportionnelle à Δx. Par contre la différentielle $\mathrm{d}f_{x_0}$ est évidemment proportionnelle à Δx, ainsi $\mathrm{d}g_{x_0}(\Delta x) = 2x_0\Delta x$ et $\mathrm{d}\sin_{x_0}(\Delta x) = \cos x_0 \Delta x$. En général

$$\mathrm{d}f_{x_0}(\lambda\Delta x) = \lambda \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x) \text{ et } \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x + \Delta' x) = \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x) + \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta' x) ,$$

autrement dit **la différentielle $\mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x)$ est linéaire par rapport à Δx.**

6.3 Exercices résolus

Soit Δ infiniment petit > 0.

Exercice 6.2. *Evaluons (si c'est possible) l'expression suivante en faisant une erreur $o(\Delta)$.*

$$\frac{1}{3 + 2\Delta - 5\Delta^2} . \tag{6.7}$$

Solution. Soient $f(x) := \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$ et $\Delta x = 2\Delta - 5\Delta^2$. La fonction f est dérivable en 3 et nous avons

$$\frac{\Delta x}{\Delta} = 2 - 5\Delta = LIM ,$$

Δx est donc $O(\Delta)$; on peut donc évaluer l'expression (6.7) en faisant une erreur $o(\Delta)$. On a $df_3(\Delta x) = \Delta x/9$, par conséquent

$$\frac{1}{3 + 2\Delta - 5\Delta^2} - \frac{1}{3} = \frac{2\Delta - 5\Delta^2}{9} + o(\Delta) .$$

Puisque $\frac{5\Delta^2}{9}$ est $o(\Delta)$, nous avons

$$\frac{1}{3 + 2\Delta - 5\Delta^2} = \frac{1}{3} + \frac{2\Delta}{9} + o(\Delta) + o(\Delta) = \frac{1}{3} + \frac{2\Delta}{9} + o(\Delta) .$$

On évalue l'expression (6.7) au moyen de $\frac{1}{3} + \frac{2\Delta}{9}$, on commet alors une erreur négligeable par rapport à Δ.

Exercice 6.3. *Peut-on évaluer l'expression suivante en faisant une erreur $o(\Delta)$?*

$$\arcsin(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\Delta} + \Delta) . \tag{6.8}$$

Evaluons-la au mieux.

Solution. Soient $g(x) := \arcsin(x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$ et $\Delta x = 2\sqrt{\Delta} + \Delta$. La fonction g est dérivable en $\frac{1}{2}$. Nous avons

$$\frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} + 1 = \text{ ig },$$

et

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta}} = 2 + \sqrt{\Delta} = \text{ limité },$$

Δx n'est donc pas $O(\Delta)$ mais est seulement $O(\sqrt{\Delta})$. On ne peut donc évaluer l'expression (6.8) en faisant une erreur $o(\Delta)$ mais on peut l'évaluer en faisant une erreur $o(\sqrt{\Delta})$. Puisque

$$dg_{\frac{1}{2}}(\Delta x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta x ,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\arcsin(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\Delta} + \Delta) &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(2\sqrt{\Delta} + \Delta) + o(\sqrt{\Delta}) \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{4\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}} + o(\sqrt{\Delta}) + o(\sqrt{\Delta}) \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{4\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}} + o(\sqrt{\Delta})
\end{aligned}$$

On évalue l'expression (6.8) au moyen de $\frac{\pi}{6} + \frac{4\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}}$, on commet alors une erreur négligeable par rapport à $\sqrt{\Delta}$.

Exercice 6.4. *Peut-on évaluer l'expression suivante en faisant une erreur $o(\Delta)$? Evaluez au mieux cette expression.*

$$\sqrt[3]{8 + 6\Delta^2} \tag{6.9}$$

Solution. Soient $h(x) := \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$ et $\Delta x = 6\Delta^2$. La fonction h est dérivable en 8. Nous avons

$$\frac{\Delta x}{\Delta} = 6\Delta = \text{ ip et } \frac{\Delta x}{\Delta^2} = 6 = \text{ limité}$$

Δx est donc $o(\Delta)$, a fortiori $O(\Delta)$ et Δx est $O(\Delta^2)$. On peut donc évaluer l'expression (6.9) en faisant une erreur $o(\Delta)$ mais on peut faire mieux et l'évaluer en faisant une erreur $o(\Delta^2)$. Puisque

$$dh_8(\Delta x) = \frac{1}{12}\Delta x ,$$

on obtient

$$\sqrt[3]{8 + 6\Delta^2} = 2 + \frac{1}{2}\Delta^2 + o(\Delta^2)$$

On évalue l'expression $\sqrt[3]{8 + 6\Delta^2}$ au moyen de $2 + \frac{1}{2}\Delta^2$, on commet alors une erreur négligeable par rapport à Δ^2. Remarquons

$$\sqrt[3]{8 + 6\Delta^2} = 2 + o(\Delta) .$$

Si on se contente d'une erreur qui soit $o(\Delta)$, on évalue $\sqrt[3]{8 + 6\Delta^2}$ au moyen de 2.

Exercice 6.5. *Evaluons l'expression suivante en commettant une erreur* $o(\Delta)$ *:*

$$\frac{\sqrt{4+2\Delta+3\Delta^2}}{3+2\Delta} \; .$$

Solution. Occupons-nous du numérateur : $4+2\Delta+3\Delta^2$ est $O(\Delta)$ et $(\sqrt{x})'(4) = \frac{1}{4}$, il s'ensuit

$$\sqrt{4+2\Delta+3\Delta^2} = 2 + \frac{2\Delta+3\Delta^2}{4} + o(\Delta) = 2 + \frac{\Delta}{2} + o(\Delta) \; .$$

Occupons-nous du dénominateur : 2Δ est $O(\Delta)$ et $(\frac{1}{x})'(3) = -\frac{1}{9}$, il s'ensuit

$$\frac{1}{3+2\Delta} = \frac{1}{3} - \frac{2\Delta}{9} + o(\Delta) \; .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{4+2\Delta+3\Delta^2}}{3+2\Delta} &= (2 + \frac{\Delta}{2} + o(\Delta)) \cdot (\frac{1}{3} - \frac{2\Delta}{9} + o(\Delta)) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{5}{18}\Delta - \frac{1}{9}\Delta^2 + o(\Delta) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{5}{18}\Delta + o(\Delta)
\end{aligned}$$

On évalue donc l'expression au moyen de $\frac{2}{3} - \frac{5}{18}\Delta$, l'erreur ainsi commise est $o(\Delta)$.

6.4 Exercices

1. Que peut-on dire de

$$IP \cdot O(\Delta^2) \quad , \quad O(\Delta)\cdot O(\Delta) \quad , \quad O(\Delta^2)\cdot O(\Delta) \quad , \quad O(\Delta^2) + o(\Delta) \quad ?$$

2. Peut-on évaluer les expressions suivantes en commettant une erreur qui soit négligeable par rapport à Δ ? Si oui faites-le.

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{2+2\Delta} & , & \dfrac{1}{\sqrt{4+3\Delta+2\Delta^2}} \\
\operatorname{arctg}(1-2\Delta+5\Delta^2) & , & \sin(2\Delta+100\Delta^2) \\
\arcsin(1-3\Delta+\Delta^2) & , & \dfrac{1}{2-5\Delta+3\Delta-\Delta^3} \\
\sqrt[3]{8+2\Delta^2+5\Delta^3} & , & \dfrac{(3-\Delta)^2}{2+\Delta} \\
\dfrac{3+\Delta}{1+5\Delta+10\Delta^2} & , & \operatorname{arctg}(\dfrac{1+3\Delta}{1-2\Delta}) \\
\dfrac{1+3\Delta+2\Delta^3}{4-\Delta+5\Delta^2} & , & \sqrt{\dfrac{4+\Delta^2}{1+2\Delta}}
\end{array}$$

3. Evaluer au mieux les expressions suivantes. Peut-on faire une évaluation en commettant une erreur qui soit négligeable par rapport à Δ ?

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{1+\Delta+\sqrt{\Delta}} & , & \cos(\dfrac{\pi}{6}+3\Delta^2) \\
\arcsin(\dfrac{1}{2}+3\Delta-2\Delta^2) & , & \sqrt{9+2\Delta^{\frac{2}{3}}+5\Delta^{\frac{3}{2}}} \\
\arcsin(\dfrac{1}{2}-2\Delta^2+3\Delta^{\frac{3}{4}}) & , & \sqrt[3]{8+2\Delta^{\frac{4}{3}}+5\Delta^{\frac{3}{2}}} \\
\dfrac{3+2\sqrt{\Delta}}{1+3\Delta} & , & \sqrt{2\Delta+5\Delta^2}
\end{array}$$

6.5 df, dx, dy

Considérons encore une fonction réelle $f : x \mapsto y = f(x)$.

On peut faire varier le réel x_0 considéré ci-dessus, on obtient alors une fonction df de deux variables x, Δx définie pour tout x réel où f est dérivable :

$$\boxed{\mathrm{d}f \ : \ x\,,\,\Delta x \longmapsto \mathrm{d}f_x(\Delta x) = f'(x)\Delta x}\ ,$$

ce qu'on note simplement

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\Delta x\ . \tag{6.10}$$

Quand on considère la fonction $x \mapsto y = f(x)$, on a deux variables : la variable indépendante x et la variable dépendante y. Chacune de ces variables a une différentielle. Pour obtenir la différentielle de x il suffit d'appliquer la définition ci-dessus à la fonction $x \mapsto x$, on obtient la *différentielle de la variable indépendante* x :

$$\boxed{\mathrm{d}x = \Delta x}\ .$$

La formule (6.10) prend alors la forme usuelle

$$\boxed{\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x}\ .$$

La *différentielle de la variable dépendante* y est la différentielle de f, autrement dit

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x}\ ,$$

$\mathrm{d}y$ dépend donc de x et de $\mathrm{d}x$.

La dérivée de f est donc égale à la fraction

$$\frac{\text{différentielle de } f}{\text{différentielle de } x}\ ,$$

on comprend dès lors pourquoi la dérivée $f'(x)$ est aussi notée (comme le faisait Leibniz) $\frac{df}{dx}$, l'apparente ambiguïté de cette notation ne présente donc pas de danger.

Vu les règles de dérivation, en tout x où f et g sont dérivables, on a :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{d}(\lambda f) & = & \lambda \mathrm{d}f & (\lambda \text{ constante }), \\ \mathrm{d}(f+g) & = & \mathrm{d}f + \mathrm{d}g \ , & \\ \mathrm{d}(f\cdot g) & = & (\mathrm{d}f)\cdot g + f\cdot(\mathrm{d}g) \ , & \\ \mathrm{d}(\frac{f}{g}) & = & \dfrac{(\mathrm{d}f)\cdot g - f\cdot(\mathrm{d}g)}{g^2} & \text{où } g(x)\neq 0 \ . \end{array}$$

6.6 Principe de Fermat

Fermat (1601-1665) est un des pionniers du calcul différentiel, il découvrit des méthodes essentielles du calcul différentiel, il utilisa des quantités infinitésimales et leurs ordres de grandeur d'une façon informelle et cela avant Newton et Leibniz ; Lagrange et Laplace le considéraient d'ailleurs comme le fondateur de l'Analyse infinitésimale. Comme on va l'observer sur un exemple de recherche d'extremum, Fermat résolvait des problèmes par des méthodes qu'on pourrait aujourd'hui qualifier de non rigoureuses mais ... qui deviennent parfaitement rigoureuses si on remplace à bon escient l'égalité par $\approx_\Delta$. Rappelons qu'un des apports principaux de l'Analyse non standard est l'introduction et l'utilisation de la relation "*infiniment proche*" pour remplacer à certains moments la relation d'égalité.

Observons comment Fermat résout le problème suivant d'extrema ([3]) :

on considère un segment OA de longueur a, il s'agit de déterminer la position du point B sur le segment OA de telle sorte que le rectangle dont les longueurs des côtés sont les longueurs de OB et BA, ait une aire maximale

Notons x la longueur de OB. Il faut donc rendre maximal le produit $x(a-x)$. Que fait Fermat ? Il suppose qu'il connaît la valeur de x rendant maximal ce produit. Au départ de cette valeur il donne à x une variation infinitésimale e et il affirme qu'alors la valeur du produit reste inchangée, autrement dit

$$x(a-x) = (x+e)(a-x-e) \ , \tag{6.11}$$

de là il déduit

$$ea - 2ex - e^2 = 0 \ , \tag{6.12}$$

d'où

$$a - 2x - e = 0 \tag{6.13}$$

et, en "*effaçant*" l'infiniment petit e, il obtient $x = a/2$. Fermat applique la même méthode pour résoudre d'autres problèmes d'extrema a priori plus compliqués. Ainsi, pour Fermat, *si x_0 donne à une expression $f(x)$ une valeur minimale ou maximale, alors si e est une variation infiniment petite on doit avoir $f(x_0+e) = f(x_0)$!*

Pour nous, cela n'est pas vrai, mais comme on va le voir cela est correct si on remplace $f(x+e) = f(x)$ par $f(x+e) \approx_e f(x)$. Ainsi la relation $\approx_e$ permet de rencontrer parfaitement l'argumentation de Fermat.

Soit x_0 un réel. Par **voisinage** de x_0 on entend un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]x_0-h, x_0+h[$ où h est un réel > 0. Précisons la notion d'extremum local :

*$f(x)$ admet un **maximum local** (respectivement **minimum local**) en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que*
— *$f(x)$ soit définie dans V,*
— *pour tout x dans V, on a $f(x_0) \geq f(x)$ (respectivement $f(x_0) \leq f(x)$).*

Théorème 17 (Principe de Fermat)**.** *Soit f dérivable en un réel x_0 et admettant en x_0 un minimum local ou un maximum local, soit Δ un infiniment petit non nul. Alors*

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

et pour tout Δx qui est $O(\Delta)$, on a

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + o(\Delta)$$

autrement dit

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx_\Delta f(x_0)}\,.$$

En particulier, pour tout Δx infiniment petit, on a

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx_{\Delta x} f(x_0)}\,.$$

Démonstration. Envisageons le cas où f admet en x_0 un maximum local. Soit h un réel > 0 tel que pour tout $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$ on ait $f(x) \leq f(x_0)$. D'après le Principe de transfert on a $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x dans ${}^*]x_0 - h, x_0 + h[$.
Soit ε ip > 0. Nous avons $x_0 - h < x_0 \pm \varepsilon < x_0 + h$ et donc

$$\frac{f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0)}{-\varepsilon} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \leq 0.$$

Or

$$f'(x_0) = \mathrm{st}(\frac{f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0)}{-\varepsilon}) = \mathrm{st}(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon})\ ,$$

d'où $f'(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) \leq 0$ et donc $f'(x_0) = 0$.
Si Δx est $O(\Delta)$, d'après le théorème des accroissements infinitésimaux, on a

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta) = f(x_0) + o(\Delta)\ .$$

□

Remarquons que le fait que la dérivée s'annule en x_0 nous donne une condition nécessaire pour obtenir un extremum local en x_0 (pour autant que la fonction soit dérivable), mais il ne s'agit pas d'une condition suffisante. Il se peut que $f'(x_0) = 0$ et que la fonction n'admette pas en x_0 un extremum local, c'est par exemple le cas de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et dont la dérivée s'annule en 0. Il se peut aussi que la fonction admette un extremum local en x_0 et qu'elle ne soit pas dérivable en ce réel x_0, c'est le cas de $|x|$ en 0. Un réel x_0 où $f'(x_0) = 0$ s'appelle un **point stationnaire** de f. Par conséquent

les extrema locaux où f est dérivable se trouvent parmi les points stationnaires de f.

6.7 Plan hyperréel

Plaçons-nous dans le plan cartésien, c'est-à-dire le plan muni d'un système d'axes perpendiculaires munis de la même unité. Chaque point est alors identifié au couple de nombres réels formé par son abscisse et son ordonnée, le plan est ainsi assimilé à l'ensemble $\mathbb{R}^2$. On sait mesurer la distance de deux points de $\mathbb{R}^2$: si $\mathbf{p} = (x, y)$ et $\mathbf{p}' = (x', y')$, la distance (euclidienne) de $\mathbf{p}$ à $\mathbf{p}'$ est donnée par

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\,, \tag{6.14}$$

muni de cette distance $\mathbb{R}^2$ est appelé le **plan euclidien** ou ici **plan réel**.

On peut faire de même avec des points qui auraient des coordonnées hyperréelles. Ainsi on note ${}^*\mathbb{R}^2$ l'ensemble de tous les couples (x, y) de nombres hyperréels et on mesure encore la distance de deux points $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ de ${}^*\mathbb{R}^2$ au moyen de la formule (6.14). L'espace ${}^*\mathbb{R}^2$ est alors appelé le **plan hyperréel** . Dans le plan hyperréel les coordonnées (abscisse et ordonnée) des points sont donc des hyperréels. Les points de $\mathbb{R}^2$ ou ${}^*\mathbb{R}^2$ sont désignés par des lettres grasses $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ...

Les notions de limité, d'infiniment proche et de partie standard s'étendent naturellement, on définit :

un point $\mathbf{p}$ *de* ${}^*\mathbb{R}^2$ *est limité lorsque sa distance à l'origine est un nombre limité ; deux points* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *de* ${}^*\mathbb{R}^2$ *sont infiniment proches, en abrégé* $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ *, lorsque leur distance est infiniment petite.*

Remarquons : si x, y sont limités (resp. ip), alors $\sqrt{x^2 + y^2}$ est limité (resp. ip). Réciproquement, puisque

$$|x|\,,\ |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

si $\sqrt{x^2 + y^2}$ est limité (resp. ip), alors x, y sont limités (resp. ip). Par conséquent :

un point de ${}^*\mathbb{R}^2$ *est limité si et seulement si ses coordonnées sont limitées ; deux points de* ${}^*\mathbb{R}^2$ *sont infiniment proches si et seulement si leurs coordonnées respectives sont infiniment proches.*

Par conséquent la relation $\approx$ est aussi une relation d'équivalence dans le plan hyperréel, autrement dit, si $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}''$ sont des points de ${}^*\mathbb{R}^2$, alors $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}$, ensuite $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$ entraîne $\mathbf{p}' \approx \mathbf{p}$ et enfin ($\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}' \approx \mathbf{p}''$) implique $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}''$. Il s'ensuit aussi que deux points de l'espace réel sont $\approx$ si et seulement s'ils sont égaux.

Considérons un point limité $\mathbf{p} = (x, y)$; alors les coordonnées x et y sont des nombres limités et on peut donc poser $\mathbf{q} = (\mathrm{st}(x), \mathrm{st}(y))$; par conséquent $\mathbf{q}$ est un point $\mathbb{R}^2$ infiniment proche de $\mathbf{p}$, de plus un tel point de l'espace réel est forcément unique. En conclusion :

tout point $\mathbf{p}$ *limité du plan hyperréel est infiniment proche d'un et d'un seul point du plan cartésien, appelé évidemment la partie standard de* $\mathbf{p}$ *et noté* $\mathrm{st}(\mathbf{p})$ *, de plus si* $\mathbf{p} = (x, y)$ *alors* $\mathrm{st}(\mathbf{p}) = (\mathrm{st}(x), \mathrm{st}(y))$.

Par exemple : soient ε un ip non nul et H un ig, posons :

$$p := (2+\varepsilon, \frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon}) \ , \ q =: (\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon) \ , \ p' =: (\frac{2H+1}{H-1}, 1+\varepsilon) \ , \ q' := (2-\varepsilon, 3+\frac{1}{H}) \ ,$$

alors les points $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$ sont limités et $\mathbf{q}$ est non limité, de plus $\mathrm{st}(\mathbf{p}) = (2,3)$, $\mathrm{st}(\mathbf{p}') = (2,1)$, $\mathrm{st}(\mathbf{q}') = (2,3)$ d'où $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}'$.

Comme dans ${}^*\mathbb{R}$ on considère la *monade* ou le *halo* de tout point du plan cartésien : *la* ***monade*** *ou le* ***halo*** *d'un point* $\mathbf{p}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est l'ensemble de tous les points de* ${}^*\mathbb{R}^2$ *infiniment proches de* $\mathbf{p}$, on la représente graphiquement comme sur la figure 6.1 par une fenêtre circulaire pouvant être agrandie à volonté et montrant des points infiniment proches de $\mathbf{p}$. Ainsi tout point limité du plan hyperréel apparaît dans une et une seule monade.

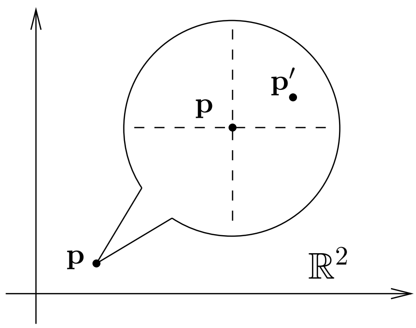


FIGURE 6.1: représentation de la monade de $\mathbf{p}$ avec $\mathbf{p}' \approx \mathbf{p}$.

Utilisons les notions d'ordre de grandeur vues plus haut pour comparer des points de ${}^*\mathbb{R}^2$ infiniment proches comme on l'on déjà fait pour des nombres (voir page 85). Prenons toujours comme étalon de mesure un infiniment petit Δ non nul et comparons la distance des points avec Δ, comme dans ${}^*\mathbb{R}$, on définit :

Les points $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{q}$ *de* ${}^*\mathbb{R}^2$ *sont infiniment proches par rapport à* Δ *, en abrégé* $\mathbf{p} \approx_\Delta \mathbf{q}$ *, lorsque la distance entre* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{q}$ *est* $o(\Delta)$ *.*

Des points infiniment proches par rapport à Δ sont évidemment infiniment proches, mais le contraire n'est pas nécessairement vrai. Par exemple :

si $\mathbf{q} = (x,y)$, $\mathbf{q}' := (x+10\Delta^2, y-5\Delta^2)$ et $\mathbf{q}'' := (x+\Delta, y-\Delta)$, alors on a

$$d(\mathbf{q},\mathbf{q}') = 5\sqrt{5}\,\Delta^2 \qquad \text{et} \qquad d(\mathbf{q},\mathbf{q}'') = \sqrt{2}\,\Delta \ ,$$

d'où $\mathbf{q} \approx_\Delta \mathbf{q}'$ et $\mathbf{q} \not\approx_\Delta \mathbf{q}''$.

Pratiquement lorsqu'on a des points du plan hyperréel il est plus commode de considérer séparément chacune des coordonnées, cela est possible :

Proposition 18. *La distance de deux points du plan hyperréel est* $O(\Delta)$ *si et seulement si les différences de leurs coordonnées respectives sont chacunes* $O(\Delta)$ *.*
Deux points de ${}^*\mathbb{R}^2$ *sont* $\approx_\Delta$ *si et seulement si leurs coordonnées respectives sont* $\approx_\Delta$ *.*

En effet, si $\mathbf{p} = (x, y)$ et $\mathbf{p}' = (x', y')$ sont deux points de ${}^*\mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{|x - x'|}{|\Delta|}, \frac{|y - y'|}{|\Delta|} \leq \frac{d(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}{|\Delta|} = \sqrt{(\frac{x - x'}{\Delta})^2 + (\frac{y - y'}{\Delta})^2},$$

d'où les équivalences énoncées dans la proposition ci-dessus.

Par exemple, si $\mathbf{q} := (x, y)$, on a

$$\mathbf{q} \approx_\Delta (x + 3\Delta^2,\, y - 5\Delta^{3/2}) \qquad , \qquad \mathbf{q} \approx_\Delta (x + 10^9\Delta^{4/3},\, y + 127\Delta^3)$$

mais

$\mathbf{q} \not\approx_\Delta (x + \Delta^2,\, y - \Delta)$ et la distance de $\mathbf{q}$ à $(x + \Delta^2,\, y - \Delta)$ est $O(\Delta)$,
$\mathbf{q} \not\approx_\Delta (x + \sqrt{\Delta},\, y)$ et de plus la distance de $\mathbf{q}$ à $(x + \sqrt{\Delta},\, y)$ n'est pas $O(\Delta)$,
et cela bien que $\mathbf{q} \approx (x + \sqrt{\Delta},\, y)$.

Bien entendu $\mathbf{p} \approx_\Delta \mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}' \approx_\Delta \mathbf{p}''$ entraîne $\mathbf{p} \approx_\Delta \mathbf{p}''$.

6.8 Le microscope de grossissement $1/\Delta$

Pour représenter ces notions modifions et améliorons la représentation graphique de la monade d'un point limité. On sait qu'un microscope ne peut discerner deux points dont la distance est trop petite : un microscope a un certain pouvoir séparateur et lorsque celui-ci est dépassé, des points distincts sont observés comme confondus. Il en sera de même avec la représentation que nous allons maintenant préciser, aussi pour désigner cette représentation nous parlerons de "microscope". Considérons un infiniment petit $\Delta > 0$ et $\mathbf{p}_0$ un hyperréel ou un point de ${}^*\mathbb{R}^2$.

Description du microscope de grossissement $1/\Delta$ pointé vers $\mathbf{p}_0$.
Le microscope de "grossissement" $1/\Delta$ dirigé vers $\mathbf{p}$ permet d'observer des points infiniment proches de $\mathbf{p}_0$ en appliquant les deux principes suivants :

1. *le grossissement est $1/\Delta$, par conséquent les mesures sont multipliées par $1/\Delta$ et dans l'oculaire l'unité de mesure correspond à la longueur Δ ;*
2. *dans l'oculaire il est impossible de distinguer des mesures qui grossies (suite à la multiplication par $1/\Delta$) restent infiniment petites.*

Pour gommer des différences infiniment petites, il suffit de prendre la partie standard, dès lors, dans l'oculaire du microscope de grossissement $1/\Delta$ une longueur l est observée comme étant $\mathrm{st}(\frac{l}{\Delta})$. Par conséquent une longueur n'est observable dans l'oculaire que si elle est $O(\Delta)$ et les points observables dans l'oculaire sont ceux dont la distance à $\mathbf{p}_0$ est $O(\Delta)$. En conclusion, *le microscope de grossissement $1/\Delta$ pointé vers $\mathbf{p}_0$ est défini comme suit :*

Règle 1 : *l'oculaire de ce microscope est composé des points infiniment proches de $\mathbf{p}_0$ dont la distance à $\mathbf{p}_0$ est $O(\Delta)$; dans l'oculaire la distance entre deux points $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}''$ observés est mesurée comme étant*

$$\mathrm{st}(\frac{d(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{\Delta}).$$

Il s'ensuit que les point $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}''$ sont observés comme identiques si et seulement si $\mathrm{st}(d(\mathbf{p}',\mathbf{p}'')/\Delta) = 0$, d'où

Règle 2 : *deux points sont observés comme identiques si et seulement leur distance est $o(\Delta)$, autrement dit si et seulement si ils sont $\approx_\Delta$.*

Bien entendu, on peut faire exactement de même dans ${}^*\mathbb{R}$ et utiliser le microscope de grossissement $1/\Delta$ pour observer des hyperréels infiniment proches d'un réel x_0.

Ainsi ce microscope rend parfaitement compte des notions $O(\Delta)$ et $o(\Delta)$: dans l'oculaire

— *les mesures observables sont $O(\Delta)$,*
— *les mesures observées comme nulles sont $o(\Delta)$,*
— *les mesures observées comme non nulles ont le même ordre de grandeur que Δ.*

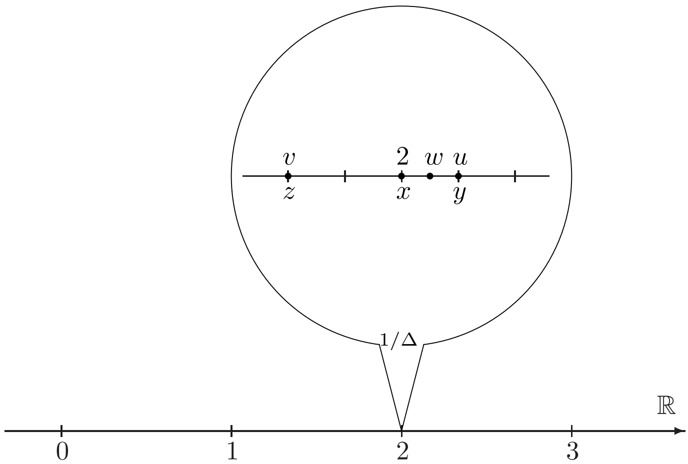


FIGURE 6.2: Observation dans le microscope de grossissement $1/\Delta$ dirigé vers 2.

Par exemple, dirigeons le microscope de grossissement $1/\Delta$ vers 2, nous pouvons ainsi observer tous les nombres de la forme $2 + l\Delta$ où l est limité, en particulier 2 est au centre de l'oculaire et les nombres

$$u = 2+\Delta, v = 2-2\Delta, w = 2+\frac{\Delta}{2}, x = 2+10^6\Delta^2, y = 2+\Delta+3\Delta^2, z = 2-2\Delta+3\Delta^3$$

apparaissent comme sur la figure 6.2 : u, v, w sont observés distinctement et x, y, z sont observés comme étant respectivement 2, u, v. Par contre les nombres $2+\sqrt{\Delta}$, $2-\Delta^{2/3}$, bien qu'infiniment proches de 2, ne peuvent être observés dans l'oculaire puisque la distance de ces deux nombres à 2 n'est pas $O(\Delta)$.

Si on modifie le grossissement du microscope dirigé vers un point fixé $\mathbf{p}$ on peut observer et distinguer plus ou moins de points infiniment proches de $\mathbf{p}$, cela est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple. *Plaçons dans le plan hyperréel et considérons les points suivants tous infiniment proches du point* $\mathbf{p} = (1, 2)$ *:*

$$\begin{array}{llll} \mathbf{p}_1 = & (1+\Delta, 2+2\Delta) & , & \mathbf{p}_2 = & (1+\Delta+3\Delta^3, 2+2\Delta-100\Delta^2) \\ \mathbf{p}_3 = & (1-2\Delta, 2+\Delta) & , & \mathbf{p}_4 = & (1+\Delta^2, 2-2\Delta^2-1000\Delta^3) \\ \mathbf{p}_5 = & (1+\Delta, 2-2\sqrt{\Delta}) & , & \mathbf{p}_6 = & (1+2\sqrt{\Delta}, 2+\sqrt{\Delta}) \\ \mathbf{p}_7 = & (1-3\Delta^2, 2+\Delta^2) & , & \mathbf{p}_8 = & (1+2\sqrt{\Delta}+\Delta, 2+\sqrt{\Delta}+10^9\Delta)\ . \end{array}$$

Observons ces points dans l'oculaire d'un microscope dirigé vers le point $\mathbf{p}$ *d'abord avec le grossissement* $1/\Delta$*, ensuite le grossissement* $1/\Delta^2$ *et enfin le grossissement* $1/\sqrt{\Delta}$*.*

Ces observations font l'objet de la figure 6.3, remarquons :

1. *Observation dans l'oculaire de grossissement* $1/\Delta$ *:* les points $\mathbf{p}_5$, $\mathbf{p}_6$ et $\mathbf{p}_8$ ne sont pas observables avec ce grossissement, les points $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ apparaissent comme confondus, les points $\mathbf{p}_4$, $\mathbf{p}_7$ apparaissent comme confondus avec le point $\mathbf{p}$.
2. *Observation dans l'oculaire de grossissement* $1/\Delta^2$ *:* seuls les points $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_4$ et $\mathbf{p}_7$ sont observés.
3. *Observation dans l'oculaire de grossissement* $1/\sqrt{\Delta}$ *:* tous les points considérés sont observés, les points $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$, $\mathbf{p}_7$ apparaissent comme confondus avec le point $\mathbf{p}$, les points $\mathbf{p}_6$ et $\mathbf{p}_8$ apparaissent comme confondus.

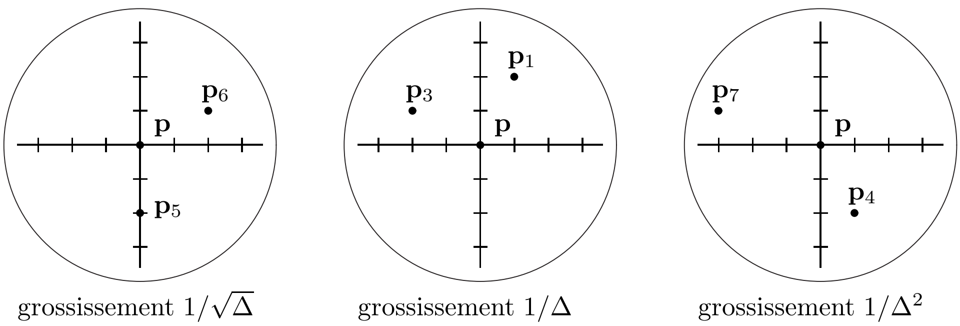


FIGURE 6.3

Le microscope de grossissement $1/\Delta$ permet de modéliser certains types d'observation, certaines façons usuelles d'effectuer des approximations. On peut ainsi dire que *le physicien ou l'ingénieur qui, lorsque pour une variation infinitésimale* Δ *d'une variable, considère comme négligeables les expressions de la forme* $\Delta \cdot \varepsilon$ *où* ε *est un infiniment petit, observe le phénomène qu'il étudie au travers de l'oculaire d'un microscope de grossissement* $1/\Delta$ *.*

Si on revient à ce qu'on disait à la page 91 concernant la façon dont Fermat cherchait les maxima, on peut aussi dire que Fermat observait les variations de la fonction dans l'oculaire d'un microscope de grossissement $1/e$!

6.9 Exercices

Soit Δ un ip > 0.

1. Dirigeons le microscope de grossissement $1/\Delta$, puis de grossissement $1/\Delta^2$ et enfin de grossissement $1/\sqrt{\Delta}$ vers 1. Comment observe-t-on alors les nombres suivants ? Représentez cela sur trois dessins (un par grossissement).

$$\begin{array}{rlcrl}
x_1 = & 1+7\Delta^2 & , & x_2 = & 1+2\Delta \\
x_3 = & 1-3\Delta^2 & , & x_4 = & 1+2\Delta-100\Delta^2 \\
x_5 = & 1-3\Delta & , & x_6 = & -3\Delta^2+10^9\Delta^3 \\
x_7 = & 1-3\Delta+9\Delta^{3/2} & , & x_8 = & 1+\sqrt{\Delta}-2\Delta \\
x_9 = & 1-2\sqrt{\Delta} & , & x_{10} = & 1+\sqrt[3]{\Delta} \\
x_{11} = & 1+\sqrt{\Delta} & , & x_{12} = & 1+2\Delta+7\Delta^2 \\
x_{13} = & 11+10^{-100} & , & x_{14} = & 1+10^6\Delta^3 \ .
\end{array}$$

2. Dirigeons le microscope de grossissement $1/\Delta$ vers le point du plan $(1,2)$ et regardons dans l'oculaire. Les points suivants sont-ils observés ? Si oui comment ? Représentez cela sur un dessin.

$$\begin{array}{c|c}
(1+\Delta, 2+\Delta^2)\,, & (1-\Delta, 2+\Delta)\,, \\
(2, 2-\Delta)\,, & (1+\Delta, 2-10\Delta^3)\,, \\
(1-\Delta+10^4\Delta^2, 2+\Delta+10^3\Delta^3)\,, & (1+100\Delta^2, 2-3\Delta^2)\,, \\
(1+\Delta, 2+\sqrt{\Delta}), & (1-\Delta+10\Delta^2, 2+\Delta-10^6\Delta^2)\ .
\end{array}$$

Chapitre 7

Tangente à une courbe

Commençons par une observation sur un exemple. Considérons la parabole d'équation $y = x^2$. Observons la parabole par exemple à l'origine et en $(1,1)$ en nous plaçant dans des voisinages de plus en plus étroits des abscisses 0 et 1 : on constate que le tracé de la courbe dans le voisinage considéré se rapproche de plus en plus du tracé d'une droite pour finalement sembler s'identifier à un segment de droite (voir la figure 7.1 pour le zoom au point $(1,1)$ et la figure 7.2 pour le zoom à l'origine).

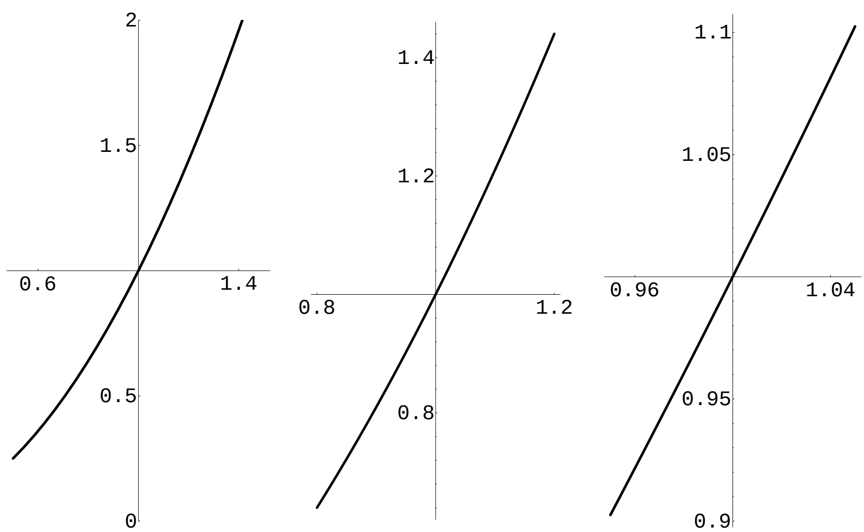


FIGURE 7.1: parabole $y = x^2$, zoom en $(1,1)$.

Nous allons utiliser le microscope de grossissement $1/\Delta$, dans ce chapitre Δ représente toujours un infiniment petit > 0.

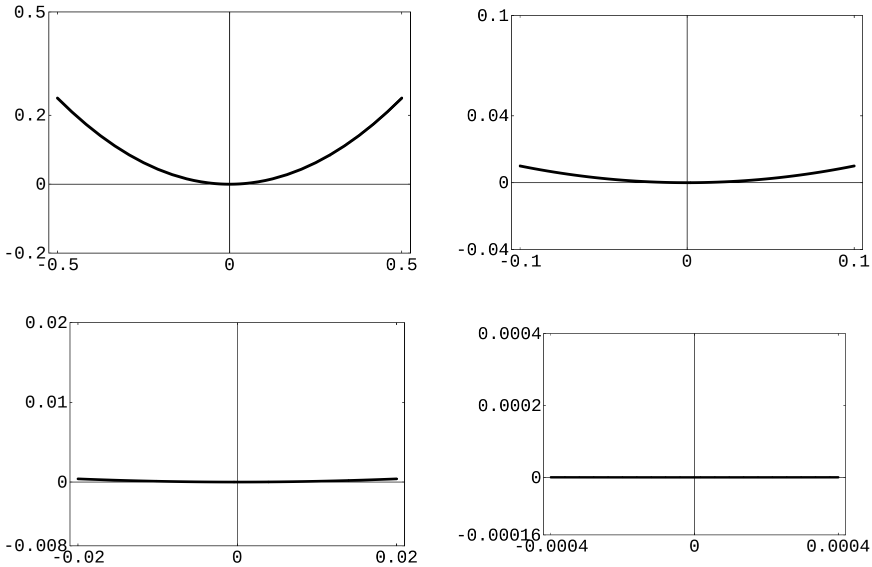


FIGURE 7.2: parabole $y = x^2$, zoom à l'origine.

7.1 Tangente à un graphe

Envisageons le cas général d'un graphe de fonction. Plaçons-nous dans le plan hyperréel. Ce que nous venons d'observer va se confirmer. Le graphe de f peut également être considéré dans le plan hyperréel : c'est l'ensemble des points (x, y) du plan hyperréel tels que $y = f(x)$. De même toute droite de $\mathbb{R}^2$ se prolonge dans le plan hyperréel : si l'équation de la droite est $Ax+By+C = 0$ (où A, B, C sonts des constantes réelles), le prolongement de la droite dans le plan hyperréel est constitué des points (x, y) de ${}^*\mathbb{R}^2$ vérifiant la même équation $Ax+By+C = 0$. Ainsi la droite D peut également être considérée dans le plan hyperréel.

Supposons f dérivable en x_0 et définie dans un voisinage de x_0 . Dirigeons le microscope de grossissement $1/\Delta$ vers le point $(x_0, f(x_0))$ et observons la portion du graphe dans l'oculaire. On observe donc la portion de graphe formée des points dont l'abscisse est de la forme $x_0 + \Delta x$. La variation d'abscisse Δx est observable dans l'oculaire, elle est donc $O(\Delta)$. D'après le Théorème des accroissements infinitésimaux, on a

$$f(x_0 + \Delta x) \approx_\Delta f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) \ . \tag{7.1}$$

Considérons le point $\boldsymbol{p}_1$ du graphe de f d'abscisse $x_0 + \Delta x$ et le point

$$\boldsymbol{p}_2 := (x_0 + \Delta x, f(x_0) + \Delta x f'(x_0)) \, .$$

D'après (7.1) ces deux points sont $\approx_\Delta$, les points $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$ sont donc observés comme confondus dans l'oculaire du microscope. Examinons de plus près le point $\boldsymbol{p}_2$, les

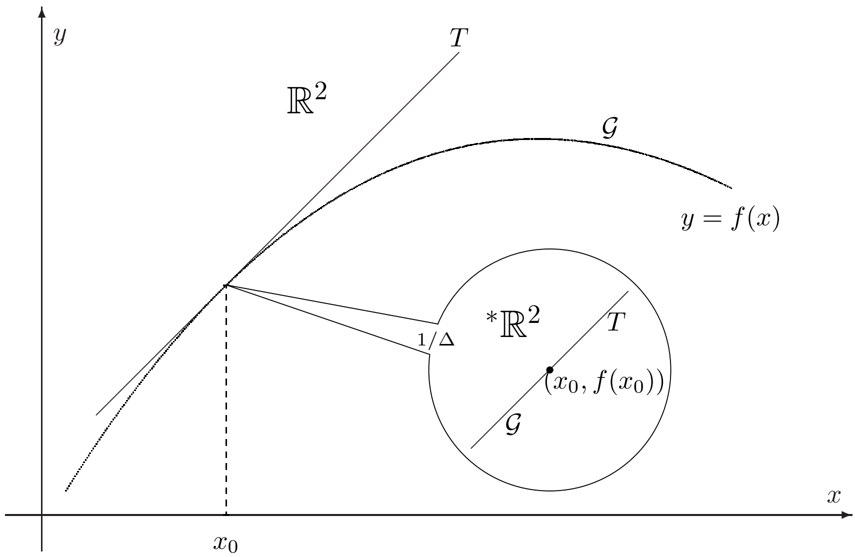


FIGURE 7.3: observation avec le '*microscope*' de grossissement $\dfrac{1}{\Delta}$.

coordonnées de $\boldsymbol{p}_2$ vérifient l'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ , \tag{7.2}$$

le point $\boldsymbol{p}_2$ est donc un point de la droite T dont l'équation est (7.2). Le point $\boldsymbol{p}_1$ est donc observé dans l'oculaire comme étant sur la droite T. On vient donc de montrer :

dans l'oculaire du microscope le graphe est observé comme une droite !

Cette droite T est donc remarquable, on l'appelle la **tangente** au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Par conséquent, *l'équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est*

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \ . \tag{7.3}$$

Le coefficient angulaire de la tangente en $(x_0, f(x_0))$ vaut donc $f'(x_0)$.

Si f est dérivable en x_0 et définie d'un seul côté de x_0, par exemple à droite, alors dans le raisonnement ci-dessus on prend seulement des Δx infiniment petits > 0, le graphe est alors observé dans l'oculaire du microscope comme une demi-droite, cette demi-droite est alors appelée la **demi-tangente** au graphe en $(x_0, f(x_0))$.

On peut également interpréter graphiquement la différentielle dans le plan cartésien. Considérons une variation d'abscisse Δx *réelle* $\neq 0$. Soit $y_t(x_0{+}\Delta x)$ l'ordonnée du point de la tangente d'abscisse $x_0 + \Delta x$, d'après (7.3) on a

$$y_t(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x) \ .$$

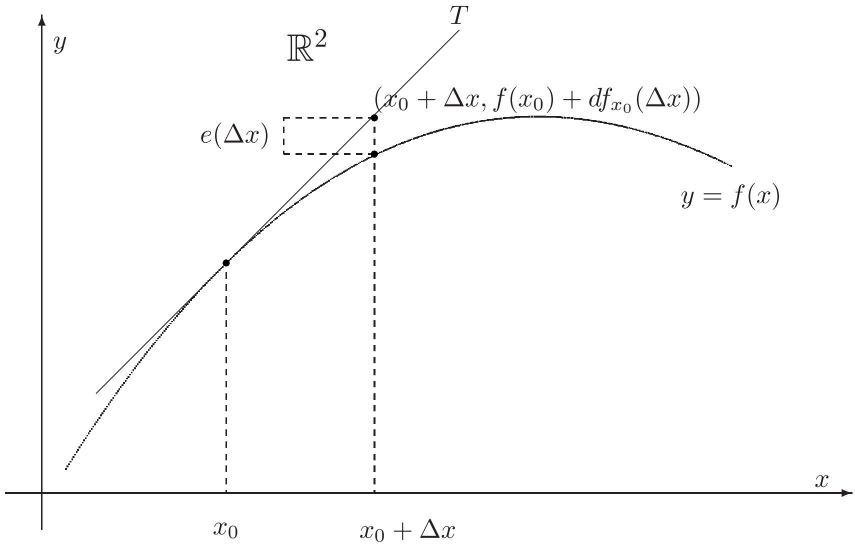


FIGURE 7.4: Différentielle, interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent :

> $df_{x_0}(\Delta x)$ *est la différence d'ordonnée entre le point du graphe d'abscisse* x_0 *et le point d'abscisse* $x_0 + \Delta x$ *de la tangente* T *.*

Ainsi *quand on évalue* $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *au moyen de* $\mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x)$*, on effectue une erreur* $e(\Delta x)$ *(illustrée sur la figure 7.4) et on se déplace sur la tangente* T *au lieu de se déplacer sur la graphe de* f *.*

7.2 Notion de courbe plane

Les graphes de fonction constituent un type particulier de courbe plane (ainsi toute verticale ne peut couper un graphe qu'en un seul point). Mais il existe d'autres types de courbes, de plus des courbes qui pourraient être des graphes de fonction pourraient être données autrement que par une équation de la forme $y = f(x)$. On pourrait bien entendu permuter le rôle de x, y et donner une courbe par une équation de la forme $x = f(y)$, mais cela est bien entendu tout aussi particulier. Plus généralement on peut se donner une courbe par son **équation cartésienne** c'est-à-dire par une égalité dont les inconnues sont les coordonnées x, y, une telle équation peut toujours se mettre sous la forme

$$F(x, y) = 0 \ , \tag{7.4}$$

la courbe considérée est alors l'ensemble de tous les points (x, y) vérifiant (7.4). Par exemple le cercle de centre l'origine et de rayon r a pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = r^2 \ ,$$

l'hyperbole équilatère de centre l'origine et ayant le point $(a, 0)$ comme sommet a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \ .$$

Mais on peut aussi avoir des courbes moins classiques, par exemple

$$x^2 - x^3 = y^2 \tag{7.5}$$

est l'équation cartésienne de la courbe représentée sur la figure 7.5.

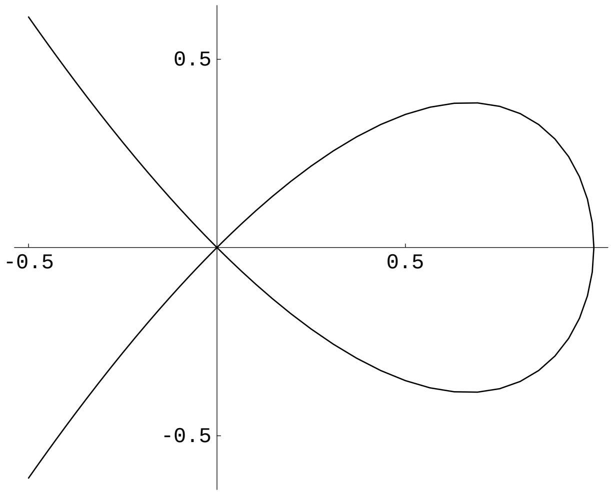


FIGURE 7.5: courbe d'équation $x^2 - x^3 = y^2$.

Une autre façon naturelle d'envisager une courbe est de la considérer comme engendrée par le mouvement d'un point dont le déplacement dépend d'un paramètre réel (hyperréel si on se place dans le plan hyperréel), l'exemple le plus naturel est donné par une trajectoire d'un point se déplaçant dans le temps, le paramètre choisi étant le temps. Ainsi un point $\boldsymbol{p}$ animé d'ou mouvement circulaire uniforme autour de l'origine va décrire un cercle caractérisé par les deux équations

$$x = r \cos \omega t \qquad , \qquad y = r \sin \omega t \tag{7.6}$$

où r et ω sont deux constantes, respectivement le rayon du cercle et la vitesse angulaire (ou la pulsation), et où t est le temps. Mais on pourrait décrire ce même cercle en prenant comme paramètre la mesure θ de l'angle au centre formé par l'axe des x et le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$, les points du cercle étant alors donnés par les équations

$$x = r \cos \theta \qquad , \qquad y = r \sin \theta \tag{7.7}$$

le paramètre θ variant alors dans $[-\pi, \pi]$ ... ou dans $[0, 2\pi]$.

Considérons maintenant un point tournant autour de l'origine, la vitesse angulaire étant constante, et s'éloignant de l'origine à vitesse constante, supposons en plus que la position initiale en $t = 0$ soit l'origine, la courbe décrite ainsi par le point $\boldsymbol{p}$ s'appelle une **spirale d'Archimède**. Cherchons des équations décrivant cette courbe. Soit ρ la distance du point $\boldsymbol{p}$ à l'origine (notée $\boldsymbol{o}$), et de nouveau θ la mesure de l'angle orienté formé par l'axe $\overrightarrow{\boldsymbol{o}x}$ et le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$, les nombres ρ, θ sont appelées les **coordonnées polaires** de $\boldsymbol{p}$. La trajectoire du point est donc caractérisée par

$$\theta = \omega t \qquad , \qquad \rho = at$$

où ω (la vitesse angulaire) et a sont des constantes > 0. Remarquons que les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires sont liées par

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \qquad , \qquad x = \rho\sin\theta}\,.$$

La spirale d'Archimède a donc pour équations

$$\begin{cases} x &= at\cos(\omega t) \\ y &= at\sin(\omega t) \end{cases} \tag{7.8}$$

où t varie dans $[0, +\infty[$. Mais on pourrait aussi décrire la spirale d'Archimède en considérant θ comme paramètre, les équations de la spirale deviennent alors

$$\begin{cases} x &= k\theta\cos\theta \\ y &= k\theta\sin\theta \end{cases} \tag{7.9}$$

où le paramètre θ varie aussi dans $[0, +\infty[$ et où la constante k vaut a/ω. La portion de spirale d'Archimède correspondant à $\theta \in [0, \frac{17\pi}{4}]$ et $k = 1$ est représentée sur la figure 7.6.

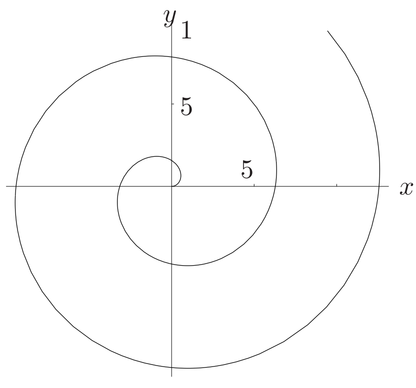


FIGURE 7.6: portion de spirale d'Archimède pour $\theta \in [0, \frac{17\pi}{4}]$.

Lorsqu'on décrit une courbe plane au moyen de deux équations de la forme

$$\begin{cases} x &= x(u) \\ y &= y(u) \end{cases} \tag{7.10}$$

où la variable réelle u varie dans un ensemble E précisé, les équations (7.10) sont appelées les **équations paramétriques** de la courbe et u est le **paramètre** dont le mouvement engendre le mouvement du point sur la courbe. Ainsi (7.6) et (7.8) constituent les équations paramétriques du cercle, respectivement de la spirale d'Archimède le paramètre choisi étant le temps t, il en est de même de (7.7) et (7.9) le paramètre choisi étant cette fois θ.

Voici quelques autres exemples de courbes données par leurs équations paramétriques, commençons par le plus simple.

Droite

Soient $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0)$ un point et $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2)$ un vecteur non nul. Considérons la droite D passant par $\boldsymbol{p}_0$ et ayant la direction de $\vec{\boldsymbol{v}}$. Les points $\boldsymbol{p}$ de cette droite sont caractérisés par le fait que $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}}$ est nul ou a la même direction que $\vec{\boldsymbol{v}}$, autrement dit par le fait qu'il existe λ réel tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}}$, les points $\boldsymbol{p}$ de D sont donc donnés par

$$\overrightarrow{\boldsymbol{op}} = \overrightarrow{\boldsymbol{op}_0} + \lambda\vec{\boldsymbol{v}} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Les équations paramétriques de D sont donc

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \end{cases} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\ ,$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \lambda\vec{\boldsymbol{v}} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Si maintenant on considère le segment S joignant deux points $\boldsymbol{p}_0$ et $\boldsymbol{p}_1$, on prend pour $\vec{\boldsymbol{v}}$ le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ et on se limite à prendre $\lambda \in [0,1]$, les points $\boldsymbol{p}$ du segment S sont donnés par $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ c'est-à-dire

$$\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_0 \qquad \text{où } \lambda \in [0,1]\ .$$

Lorsqu'on donne des équations paramétriques, *il faut donc toujours bien préciser où varie le paramètre*, en changeant cet ensemble on peut obtenir des portions différentes d'une même courbe.

Graphe d'une fonction réelle d'une variable

Soit f une fonction réelle définie dans un ensemble E. Pour écrire les équations paramétriques du graphe de f, il suffit de prendre comme paramètre l'abscisse x renommée par exemple u et on obtient ainsi les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = & u \\ y = & f(u) \end{cases} \qquad \text{avec } u \in E\ .$$

Ellipse

Soient a, b des réels 0. On sait que l'ellipse de centre l'origine et de sommets $(a, 0)$, $(0, b)$ c'est-à-dire l'ellipse dont l'équation cartésienne est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = & a\cos\theta \\ y = & b\sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in [-\pi, \pi]\,. \tag{7.11}$$

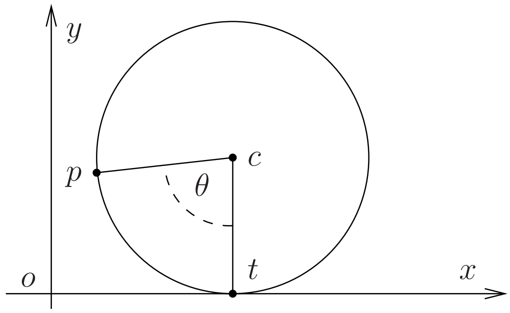


Figure 7.7: mouvement engendrant la cycloïde .

Cycloïde
Considérons une droite D horizontale, un cercle mobile de centre $\boldsymbol{c}$ et de rayon r et un point $\boldsymbol{p}$ fixé sur ce cercle. Faisons rouler (sans glissement) le cercle sur D et supposons qu'à l'instant 0 le point $\boldsymbol{p}$ se trouve sur D. La trajectoire décrite par le point $\boldsymbol{p}$ s'appelle une **cycloïde**. Cherchons ses équations paramétriques.

Prenons comme axe des x la droite D et plaçons l'origine à la position initiale de $\boldsymbol{p}$. Soit $\boldsymbol{p} = (x, y)$. Prenons comme paramètre la mesure de l'angle au centre $\widehat{\boldsymbol{tcp}}$ où $\boldsymbol{t}$ est le point de contact entre le cercle et la droite D (voir figure 7.7). A l'instant 0 on a $\theta = 0$ Puisque le cercle roule sans glissement, la longueur de l'arc de cercle $\boldsymbol{tp}$, à savoir θr, vaut la longueur du segment $\boldsymbol{ot}$. Par conséquent $\boldsymbol{c} = (\theta r, r)$, d'où

$$\begin{cases} x = & r\theta - r\sin\theta \\ y = & r - r\cos\theta \end{cases}\,. \tag{7.12}$$

Voici donc les équations paramétriques de la cycloïde où θ peut varier dans $[0, +\infty[$. Sur la figure 7.8, on a représenté la portion de cycloïde correspondant à θ dans $[0, \frac{5\pi}{2}]$ et $r = 1$.

7.3 Tangente à une courbe

On a vu comment était définie la tangente en un point du graphe d'une fonction. On voudrait maintenant étendre cela à une courbe plane quelconque.

Considérons une courbe plane $\mathcal{C}$ donnée au moyen d'une équation cartésienne ou au moyen d'équations paramétriques. Remarquons que cette courbe s'étend dans le plan hyperréel en prenant les points du plan hyperréel vérifiant la même équation

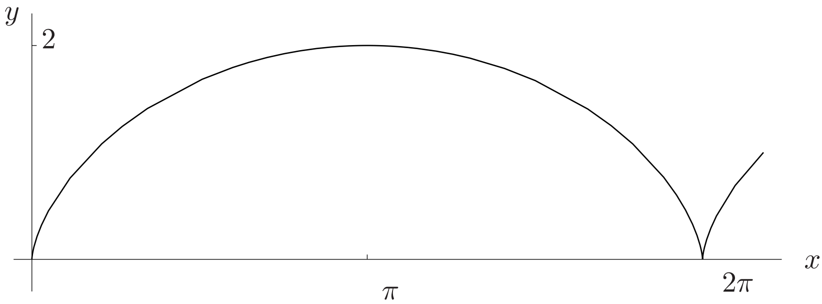


FIGURE 7.8: portion de cycloïde pour $\theta \in \frac{5\pi}{2}$ et $r = 1$.

cartésienne ou les mêmes équations paramétriques (le paramètre étant alors pris hyperréel). Soit $\boldsymbol{p}_0$ un point de $\mathbb{R}^2$ se trouvant sur la courbe $\mathcal{C}$. Nous voudrions définir la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en $\boldsymbol{p}_0$, pour cela inspirons-nous de ce qui a été fait plus haut à propos d'un graphe de fonction.

Définition (Tangente à une courbe)**.**
Soit D une droite passant par $\boldsymbol{p}_0$. La tangente à $\mathcal{C}$ en $\boldsymbol{p}_0$ est la droite D si, quel que soit Δ infiniment petit > 0, la courbe $\mathcal{C}$ est observée dans l'oculaire du microscope de grossissement $1/\Delta$ dirigé vers $\boldsymbol{p}_0$ comme étant la droite D .

Nous aurons besoin de la propriété suivante :

Proposition 19. *Soit D une droite d'équation $Ax + By + C = 0$ où A, B, C sont des réels. Si le point (u, v) du plan hyperréel vérifie $Au + Bv + C \approx_\Delta 0$, alors ce point est $\approx_\Delta$ d'un point de la droite D (considérée dans le plan hyperréel).*

Démonstration. Un des deux nombres A, B est non nul, envisageons le cas $B \neq 0$. Supposons $Au + Bv + C \approx_\Delta 0$. Il existe ε infiniment petit tel que

$$Au + Bv + C = \Delta \cdot \varepsilon \ .$$

Ne modifions pas l'abscisse et changeons l'ordonnée en prenant

$$w := v - \frac{-\Delta \cdot \varepsilon}{B} \ .$$

Ainsi $(u, v) \approx_\Delta (u, w)$. De plus $Au + Bw + C = 0$ et (u, w) est sur la droite D. □

Cherchons quelques tangentes à des courbes données au moyen d'une équation cartésienne.

Exemple 7.1. *Tangente à l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ au point $\boldsymbol{p}_1 = (2, \sqrt{3})$.*

Solution. Considérons un point $\boldsymbol{p} = (u, v)$ de l'hyperbole observé dans l'oculaire du microscope de grossissement $1/\Delta$ pointé vers $\boldsymbol{p}_1$, on a

$$u = 2 + \Delta x \qquad , \qquad v = \sqrt{3} + \Delta y$$

où Δx, Δy sont $O(\Delta)$ puisque Δx, Δy sont des mesures observées dans l'oculaire. Il s'ensuit

$$(2+\Delta x)^2 - (\sqrt{3}+\Delta y)^2 = 1$$

d'où

$$4\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\sqrt{3}\Delta y + (\Delta y)^2 = 0$$

d'où, puisque $(\Delta x)^2$ et $(\Delta y)^2$ sont $o(\Delta)$,

$$4\Delta x - 2\sqrt{3}\Delta y \approx_\Delta 0.$$

Il s'ensuit

$$4u - 2\sqrt{3}v - 2 \approx_\Delta 0$$

et le point $\boldsymbol{p}$ est observé comme étant sur la droite $2x - \sqrt{3}y - 1 = 0$. Cette droite est donc la tangente à l'hyperbole au point $\boldsymbol{p}_1$.

Exemple 7.2. *Tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $x^2 - x^3 = y^2$ en un de ses points.*

La courbe $\mathcal{C}_1$ est représentée sur la figure 7.5.
Solution. Prenons d'abord le point $\boldsymbol{p}_2 = (-1, \sqrt{2})$. Soit $\boldsymbol{p} = (u, v)$ un point de $\mathcal{C}_1$ observé dans l'oculaire du microscope de grossissement $1/\Delta$ pointé vers $\boldsymbol{p}_2$. On a

$$u = -1 + \Delta x \qquad , \qquad v = \sqrt{2} + \Delta y$$

avec Δx, Δy qui sont $O(\Delta)$. Il s'ensuit

$$(-1+\Delta x)^2 - (-1+\Delta x)^3 = (\sqrt{2}+\Delta y)^2$$

d'où successivement

$$\begin{aligned} -2\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x + 3\Delta x^2 - \Delta x^3 &= 2\sqrt{2}\Delta y + \Delta y^2 \ , \\ 5\Delta x + 2\sqrt{2}\Delta y &\approx_\Delta 0 \ , \\ 5u + 2\sqrt{2}v + 1 &\approx_\Delta 0 \ . \end{aligned}$$

Le point p est donc observé sur la droite d'équation $5x + 2\sqrt{2}y + 1 = 0$ et cette droite est donc la tangente à $\mathcal{C}_1$ en $\boldsymbol{p}_2$.

Comme on le remarque sur le tracé de $\mathcal{C}$, l'origine semble un point particulièrement intéressant, voyons ce qui s'y passe.
Utilisons encore le microscope de grossissement $1/\Delta$ pointé cette fois vers l'origine. Soit $\boldsymbol{p} = (\Delta x, \Delta y)$ un point de $\mathcal{C}_1$ observé dans l'oculaire. Les variations Δx, Δy sont donc $O(\Delta)$. On a

$$(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 = \Delta y^2 \ , \tag{7.13}$$

une analyse plus fine est alors nécessaire car les deux membres de (7.13) sont $o(\Delta)$. On a

$$(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 = (\Delta x)^3$$

d'où, en divisant par Δ^2,

$$\frac{\Delta x - \Delta y}{\Delta} \cdot \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta} = (\frac{\Delta x}{\Delta})^2 \Delta x = IP \ .$$

Si un produit de deux limités est infiniment petit, un des deux facteurs doit être infiniment petit, par conséquent

$$\frac{\Delta x - \Delta y}{\Delta} = IP \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta} = IP$$

autrement dit

$$\Delta x \approx_\Delta \Delta y \text{ ou } \Delta x \approx_\Delta -\Delta y \; .$$

Le point p est donc observé comme étant sur la droite $y = x$ ou sur la droite $y = -x$, la courbe $\mathcal{C}_1$ est donc observée dans l'oculaire comme étant l'union des deux droites $y = x$, $y = -x$. Dans un cas pareil, on dit que **la courbe $\mathcal{C}$ admet à l'origine deux tangentes** à savoir ces deux droites.

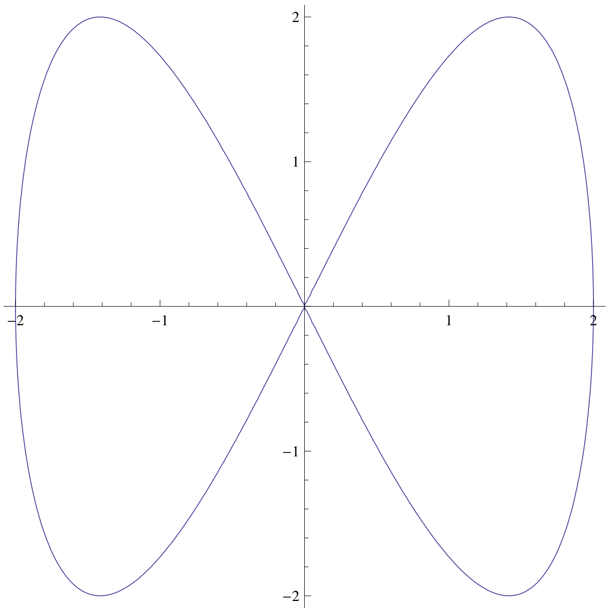


FIGURE 7.9: courbe d'équation $4x^2 - y^2 = x^4$.

Exemple 7.3. *Cherchons la (les) tangente(s) à l'origine à la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation*

$$4x^2 - y^2 = x^4 \; .$$

Cette courbe est représentée sur la figure 7.9.

Solution. Utilisons de nouveau le microscope de grossissement $1/\Delta$ pointé vers l'origine. Soit $\boldsymbol{p} = (\Delta x, \Delta y)$ un point de $\mathcal{C}_2$ observé dans l'oculaire ; Δx, Δy sont donc $O(\Delta)$. On a

$$4(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 = (\Delta x)^4 \, ,$$

d'où, en divisant par Δ^2,

$$\frac{2\Delta x - \Delta y}{\Delta} \cdot \frac{2\Delta x + \Delta y}{\Delta} = (\frac{\Delta x}{\Delta})^2 (\Delta x)^2 = IP \, .$$

Par conséquent

$$\frac{2\Delta x - \Delta y}{\Delta} = IP \text{ ou } \frac{2\Delta x + \Delta y}{\Delta} = IP$$

autrement dit

$$2\Delta x \approx_\Delta \Delta y \text{ ou } 2\Delta x \approx_\Delta -\Delta y \, .$$

Dans l'oculaire du microscope le point $\boldsymbol{p}$ est donc observé comme étant sur la droite $y = 2x$ ou sur la droite $y = -2x$. Il y a donc deux tangentes à l'origine à savoir ces deux droites.

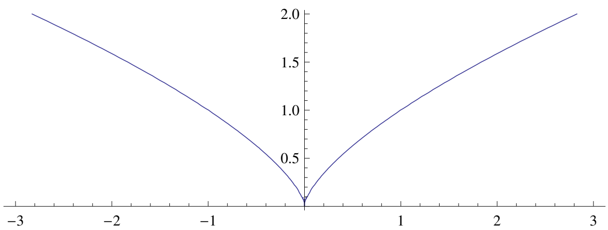


FIGURE 7.10: courbe d'équation $x^2 = y^3$.

Exemple 7.4. *Cherchons la tangente à l'origine à la courbe* $\mathcal{C}_3$ *d'équation* $x^2 = y^3$ *.*

Cette courbe est représentée sur la figure 7.10.

Solution. Soit $\boldsymbol{p} = (\Delta x, \Delta y)$ un point de $\mathcal{C}_3$ observé dans l'oculaire du microscope de grossissement $1/\Delta$ dirigé vers l'origine ; Δx, Δy sont donc $O(\Delta)$. On a

$$2(\Delta x)^2 = (\Delta y)^3 \, ,$$

d'où, en divisant par Δ^2,

$$(\frac{\Delta x}{\Delta})^2 = (\frac{\Delta y}{\Delta})^2 (\Delta y) = IP \, ;$$

par conséquent $\Delta x/\Delta$ est ip, d'où $\Delta x \approx_\Delta 0$. Dans l'oculaire du microscope, le point $\boldsymbol{p}$ est donc observé comme étant sur la droite $x = 0$. De plus ici forcément $\Delta y \geq 0$. Par conséquent dans l'oculaire la courbe est observée comme la demi-droite verticale $x = 0$, $y \geq 0$. On dit alors que **cette demi-droite est la demi-tangente à la courbe à l'origine**.

Le principe que nous appliquons pour définir et chercher la tangente à une courbe remonte à P. Fermat. Dès la fin de la première moitié du 17^e siècle, P. Fermat cherche des tangentes en appliquant cette idée. En effet observons comment Fermat cherche la tangente en un point de la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Référons-nous au dessin (7.11) ; le temps de cet exemple, comme Fermat, notons les points par des majuscules. Le point P , d'abscisse x et d'ordonnée y, désigne le point considéré sur la parabole, A est sa projection sur Ox et S l'intersection de la tangente avec Ox. Pour déterminer la tangente, Fermat détermine la mesure de la *sous-tangente* c'est-à-dire la mesure de SA, cette mesure est notée s. Voici comment procède Fermat, il considère d'abord le point Q de la *parabole* d'abscisse $x - e$ où e est infiniment petit. Ensuite *il prétend que le point Q est sur la tangente ! Ainsi pour des variations d'abscisse infinitésimales, il confond la courbe avec sa tangente.*

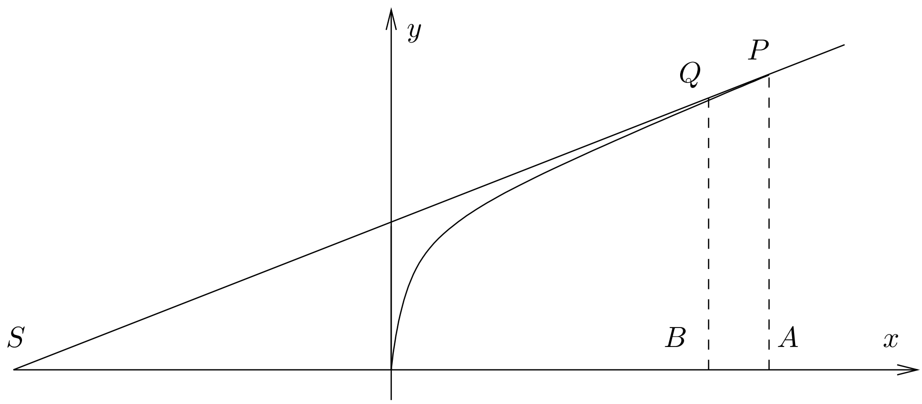


FIGURE 7.11: Tangente à la parobole d'après P. Fermat

Fermat poursuit comme suit. En utilisant le Théorème de Thales, il déduit

$$\frac{s}{s-e} = \frac{y}{u}$$

où u désigne l'ordonnée de Q. En élevant au carré et en utilisant l'équation de la parabole, il déduit alors

$$\frac{s^2}{(s-e)^2} = \frac{2px}{2p(x-e)}$$

d'où

$$s^2 - 2sx + ex = 0 \ ,$$

et finalement, en "*effaçant* " l'infiniment petit ex, P. Fermat obtient

$$s = 2x \ .$$

Pour que ce raisonnement satisfasse les critères de rigueur d'aujourd'hui, il suffit de replacer l'observation de P. Fermat dans l'oculaire d'un microscope de grossissement $1/e$ et à bon escient de remplacer certaines égalités par la relation $\approx_e$.

7.4 Tangente à une courbe données par des équations paramétriques.

Envisageons la situation générale d'une courbe donnée au moyen de ses équations paramétriques : soient a, b réels avec $a < b$, considérons une courbe $\mathcal{C}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x &= x(u) \\ y &= y(u) \end{cases} \qquad \text{où } a \leq u \leq b \;, \tag{7.14}$$

soit u_0 un réel de $[a,b]$ et $\boldsymbol{p}_0$ le point $(x(u_0), y(u_0))$. Cherchons la tangente à $\mathcal{C}$ en $\boldsymbol{p}_0$. Pour cela supposons que :

1. *$x(u)$ et $y(u)$ sont dérivables en u_0,*
2. *$x(u)$ et $y(u)$ sont continus dans $[a,b]$,*
3. *au moins une des dérivées $x'(u_0)$, $y'(u_0)$ est non nulle,*
4. *le point $\boldsymbol{p}_0$ est un point simple de $\mathcal{C}$ c'est-à-dire qu'il ne correspond pas à deux valeurs du paramètre u.*

Pointons le microscope de grossissement $1/\Delta$ vers $\boldsymbol{p}_0$.

Soit $\boldsymbol{p} = (x(u_0 + \Delta u), y(u_0 + \Delta u))$ un point de $\mathcal{C}$ observé dans l'oculaire. Envisageons le cas où $\boldsymbol{p}_0$ n'est pas une extrémité de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $u_0 \in]a,b[$.

Montrons d'abord que Δu est infiniment petit. Soit $u_1 = \mathrm{st}(u_0 + \Delta u)$. Vu la continuité de $x(u)$ et $y(u)$ dans $[a,b]$, on a $(x(u_1), y(u_1)) \approx p$ et donc $(x(u_1), y(u_1)) = \boldsymbol{p}_0$. Le point $\boldsymbol{p}_0$ étant simple, cela entraîne $u_1 = u_0$ et donc $\Delta u \approx 0$. Posons

$$\Delta x = x(u_0 + \Delta u) - x(u_0) \text{ et } \Delta y = y(u_0 + \Delta u) - y(u_0) \;,$$

ces variations Δx, Δy sont observables dans l'oculaire, elles sont donc $O(\Delta)$.

Montrons que Δu est $O(\Delta)$. Envisageons par exemple le cas où $x'(u_0) \neq 0$. D'après le Théorème des accroissements infinitésimaux, il existe ε ip tel que

$$\Delta x = x'(u_0) \cdot \Delta u + \varepsilon \cdot \Delta u \;,$$

d'où il découle

$$\frac{\Delta u}{\Delta} = \frac{1}{x'(u_0) + \varepsilon} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta} \;,$$

mais $x'(u_0) + \varepsilon$ est appréciable et $\frac{\Delta x}{\Delta}$ est limité, par conséquent $\frac{\Delta u}{\Delta}$ est limité et Δu est $O(\Delta)$.

D'après le Théorème des accroissements infinitésimaux, on a

$$\Delta x \approx_\Delta x'(u_0) \cdot \Delta u \text{ et } \Delta y \approx_\Delta y'(u_0) \cdot \Delta u \;.$$

Le point $\boldsymbol{p}$ est donc $\approx_\Delta$ du point

$$\boldsymbol{p}' := (x(u_0) + x'(u_0) \cdot \Delta u, y(u_0) + y'(u_0) \cdot \Delta u) \;,$$

ce point $\boldsymbol{p}'$ est un point de la droite D passant par $\boldsymbol{p}_0$ et ayant la direction du vecteur $(x'(u_0), y'(u_0))$. Ainsi le point $\boldsymbol{p}$ est observé comme étant sur la droite D, la courbe $\mathcal{C}$ est donc observée comme étant la droite D.

Si $\boldsymbol{p}_0$ est une extrémité de $\mathcal{C}$, on ne prend que des $\Delta u > 0$ ou < 0 suivant l'extrémité envisagé. La courbe est alors observée comme confondue avec une demi-droite. En conclusion :

Moyennant les quatre conditions précisées plus haut,

— *si $\boldsymbol{p}_0$ n'est pas une extrémité de $\mathcal{C}$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente en $\boldsymbol{p}_0$ ayant la direction du vecteur $(x'(u_0), y'(u_0))$;*

— *si $\boldsymbol{p}_0$ est une extrémité de $\mathcal{C}$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente en $\boldsymbol{p}_0$ ayant la direction du vecteur $(x'(u_0), y'(u_0))$.*

Envisageons le cas de la spirale d'Archimède et de la cycloïde.

Exemple 7.5. *Cherchons la tangente à la spirale d'Archimède après un quart de tour et après un tour complet.*

Solution. Utilisons les équations paramétriques (7.9), le paramètre choisi est donc θ. On a

$$x'(\theta) = k(\cos\theta - \theta\sin\theta) \qquad , \qquad y'(\theta) = k(\sin\theta + \theta\cos\theta) \ ,$$

d'où le vecteur $(x'(\theta), y'(\theta))$ a comme longueur $k\sqrt{1+\theta^2}$ et est donc toujours $\neq \overrightarrow{0}$. La direction de la tangente au point $(k\theta\cos\theta, k\theta\sin\theta)$ est donc la direction du vecteur

$$(\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta) \ .$$

En particulier après un quart de tour, le paramètre θ vaut $\frac{\pi}{2}$, le point sur la spirale est le point $(0, \frac{k\pi}{2})$ et le direction de la tangente est le vecteur $(-\pi, 2)$. En prenant λ comme paramètre pour d'écrire les points de la droite tangente, les équations paramétriques de cette droite sont donc

$$x = -\pi\lambda \qquad , \qquad y = \frac{k\pi}{2} + 2\lambda \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

et l'équation cartésienne de la tangente s'écrit

$$y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{k\pi}{2} \ .$$

De même après un tour complet, on a $\theta = 2\pi$, le point est $(2k\pi, 0)$ et le vecteur directeur de la tangente est $(1, 2\pi)$ d'où la tangente a pour équations paramétriques

$$x = 2k\pi + \lambda \qquad , \qquad y = 2\pi\lambda \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

et pour équation cartésienne

$$y = 2\pi x - 4k\pi^2 \ .$$

Exemple 7.6. *Cherchons la tangente à la cycloïde au point obtenu après un quart de tour du cercle.*

Solution. On utilise les équations paramétriques (7.12), le paramètre étant l'angle au centre θ. On a

$$x'(\theta) = r(1 - \cos\theta) \qquad , \qquad y'(\theta) = r\sin\theta$$

d'où la longueur du vecteur $(x'(\theta), y'(\theta))$ vaut $r\sqrt{2-2\cos\theta}$ et diffère de 0 pour tout $\theta \neq 2m\pi$ (m naturel). On peut donc chercher la tangente en tout point correspondant à $\theta \neq 2m\pi$, c'est-à-dire en tout point de la cycloïde ne se trouvant pas sur l'axe $\boldsymbol{ox}$. Cherchons la tangente à la cycloïde au point obtenu après un quart de tour du cercle. Alors $\theta = \pi/2$ et

$$p = (\frac{\pi}{2}r - r, r) \ ;$$

la tangente en ce point a pour direction le vecteur $(1,1)$, les équations paramétriques de cette droite tangente sont donc

$$x = \frac{\pi}{2}r - r + \lambda \qquad , \qquad y = r + \lambda$$

et l'équation cartésienne s'écrit $y = x + 2r - \frac{\pi r}{2}$.

Remarques :

1. Si le paramètre u_0 est égal à une des extrémités de l'intervalle $[a,b]$, alors la variation infinitésimale Δu a un signe constant (> 0 si $u_0 = a$ et < 0 si $u_0 = b$), les points de la courbe observés dans l'oculaire sont observés sur une même demi-droite issue de $\boldsymbol{p}_0$, alors ces demi-droites sont les demi-tangentes aux extrémités de la courbe..
2. La courbe $\mathcal{C}$ est **fermée** lorsque son origine coïncide avec son extrémité c'est-à-dire lorsque $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$. Il se pourrait donc qu'en ce point il y ait deux demi-droites tangentes. Pour qu'il y ait une seule tangente il faut donc que les vecteurs directeurs de ces demi-droites soient égaux, pour cela il suffit que $x'(a) = x'(b)$ et $y'(a) = y'(b)$. C'est ce qui arrive par exemple dans le cas d'un cercle et d'une ellipse.
3. Si la 4^e condition (selon laquelle le point est simple) n'est pas vérifiée, alors le point $\boldsymbol{p}_0$ correspond à plusieurs valeurs du paramètre u et il se peut qu'alors la courbe admette plusieurs tangentes en $\boldsymbol{p}_0$.

Exemple 7.7 (Courbes de Bézier du 3^e degré)**.** *Considérons quatre points distincts et non alignés du plan :* $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ *et* $\boldsymbol{p}_3$. *L'**enveloppe convexe** de ces quatre points est le plus petit ensemble convexe contenant ces quatre points (un ensemble est dit **convexe** lorsqu'il contient tout segment de droite joignant deux de ses points). Cette enveloppe convexe est donc le quadrilatère convexe dont les sommets sont les quatre points considérés. On peut prouver que l'enveloppe convexe de ces points est l'ensemble des points p tels que*

$$\boldsymbol{p} = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k \boldsymbol{p}_k \ \text{ avec } \ \sum_{k=0}^{3} \lambda_k = 1 \ \text{ et } \lambda_k \geq 0 \ .$$

*La **courbe de Bézier** associée aux points* $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ *est la courbe définie par*

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=0}^{3} C_3^k t^k (1-t)^{3-k} \boldsymbol{p}_k \quad \text{avec } t \in [0,1] \ .$$

Les points $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ *sont appelés les points guides de cette courbe de Bézier. Nous alons montrer :*

— *la courbe de Bézier est contenue dans l'enveloppe convexe de* $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$.
— *la courbe de Bézier a pour tangente en* $\boldsymbol{p}_0$ *la droite passant par* $\boldsymbol{p}_0$ *et* $\boldsymbol{p}_1$ *et pour tangente en* $\boldsymbol{p}_3$ *la droite passant par* $\boldsymbol{p}_2$ *et* $\boldsymbol{p}_3$.

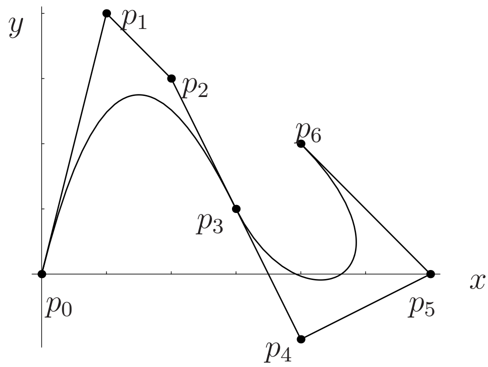


FIGURE 7.12: deux courbes de Bézier se raccordant en $\boldsymbol{p}_3$

Solution. 1) Posons $\lambda_k(t) = C_3^k t^k (1-t)^{3-k}$. Alors $\lambda_k(t) \geq 0$ et

$$\sum_{k=0}^{3} \lambda_k(t) = \sum_{k=0}^{3} C_3^k t^k (1-t)^{3-k} = (t + (1-t))^3 = 1 \,,$$

la courbe de Bézier est donc dans l'enveloppe convexe de $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$.

2) En posant

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(t) = (1-t)^3\overrightarrow{\boldsymbol{op}_0} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{\boldsymbol{op}_1} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{op}_2} + t^3\overrightarrow{\boldsymbol{op}_3}$$

on a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}'(t) = -3(1-t)^2\overrightarrow{\boldsymbol{op}_0} + 3(1-t)^2\overrightarrow{\boldsymbol{op}_1} - 6t(1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{op}_1} + 6t(1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{op}_2} - 3t^2\overrightarrow{\boldsymbol{op}_2} + 3t^2\overrightarrow{\boldsymbol{op}_3}$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}'(t) = 3((1-t)^2\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + 2t(1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} + t^2\overrightarrow{\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3})$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}'(0) = 3\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} \text{ et } \overrightarrow{\boldsymbol{F}}'(1) = 3\overrightarrow{\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3}$$

et la tangente en $\boldsymbol{p}_0$, resp. en $\boldsymbol{p}_3$, a donc la direction de $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$, resp. $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3}$. □

Les courbes de Bézier du troisième degré sont fréquemment utilisées par les logiciels de dessin pour le tracé de courbes. En fait dans ces applications on raccorde des courbes de Bézier successives de telle sorte qu'au point de raccord les deux courbes de Bézier aient la même tangente et cela est possible vu le résultat prouvé ci-dessus : si les points $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$ sont choisis sur la même droite, la courbe de Bézier correspondant aux points $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ et la courbe de Bézier correspondant aux points $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$, $\boldsymbol{p}_5$, $\boldsymbol{p}_6$ auront la même tangente en leur extrémité $\boldsymbol{p}_3$, cette situation est illustrée sur la figure 7.12.

7.5 Exercices

1. Dirigeons le microscope de grossissement $1/\Delta$ vers le point du plan $(1,2)$ et regardons dans l'oculaire. Les graphes suivants sont-ils observés ? Si oui, comment ?
   — Graphe de $x \longmapsto x^2+1$.
   — Graphe de $x \longmapsto \frac{3x+1}{x+1}$.
   — Graphe de $x \longmapsto \sqrt{x+3}$.
   — Graphe de $x \longmapsto \frac{8}{\pi}\operatorname{arctg} x$.
2. Cherchez l'équation cartésienne de la tangente au graphe de la fonction au point indiqué :

Fonction	Point
$f(x) := \frac{x}{x+1}$	point d'abscisse 2
$\arcsin x$	point d'abscisse 1/2
$\operatorname{arctg} x$	point d'abscisse 1

3. Considérons l'ellipse d'équation $x^2+4y^2=4$. Cherchez *de trois façons différentes* la tangente à cette ellipse au point d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.
4. En utilisant la définition de la tangente, cherchez de deux façons différentes (définition de la tangente et tangente à un graphe)la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $x^3+y^2=5$, au point $\boldsymbol{p}_0=(1,y_0)$ avec $y_0>0$.
5. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2-4y^2=1$ et soit $\boldsymbol{p}_0$ le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse 2 et d'ordonnée positive.
   Cherchez la tangente à l'hyperbole en ce point
   — en utilisant la définition de la tangente et le microscope
   — en utilisant les équations paramétriques de l'hyperbole
6. Cherchez les équations paramétriques et l'équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équations :

$$x=\sqrt{3+2\cos(t)} \qquad , \qquad y=1+2\sin(\frac{t}{2})$$

   au point $\boldsymbol{p}_0$ correspondant à $t_0=\frac{\pi}{3}$.
7. Cherchez la tangente au point $(1,1)$ de la courbe d'équation $x^3+y^3=2$.
8. **Folium de Descartes**
   Soit a une constante réelle >0 . Le folium de Descartes a pour équation

$$x^3+y^3-3axy=0\ .$$

   — Cherchez la tangente au point d'intersection du folium avec la première bissectrice, autre que l'origine.
   — Que se passe-t-il à l'origine.
9. **Cardioïde**
   La courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho=a(1+\cos\theta) \qquad \text{où } \theta\in[-\pi,\pi]$$

   est appelé une *cardioïde.* Elle est représentée sur la figure 7.14

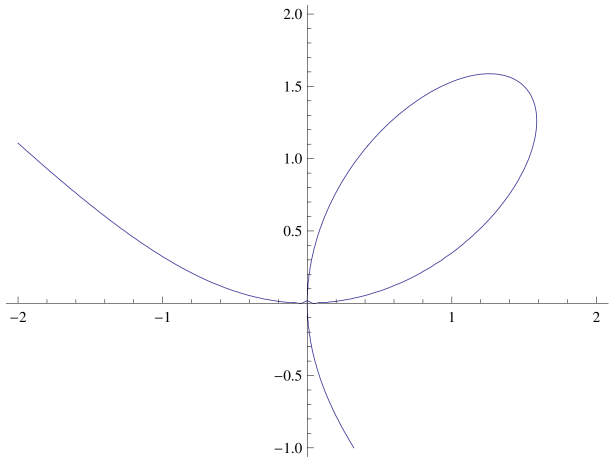


FIGURE 7.13: folium de Descartes (a=1)

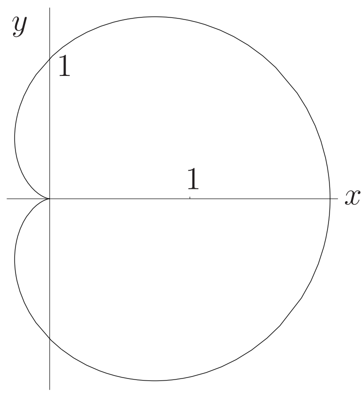


FIGURE 7.14: cardioïde (a=1)

— Ecrivez les équations paramétriques de la cardioïde.
— Pourquoi la cardioïde est-elle symétrique par rapport à l'axe des x ?
— Cherchez la tangente au point de la cardioïde correspondant à $\theta = \frac{\pi}{4}$ et au point correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$.

10. **Lemniscate**
Le lemniscate a pour équation
$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$
où a est une constante réelle > 0.
— cherchez la tangente au pont d'abscisse a,
— dans le cas où $a = 4$, cherchez la tangente au point d'abscisse 2 et d'ordonnée > 0,
— que se passe-t-il à l'origine.

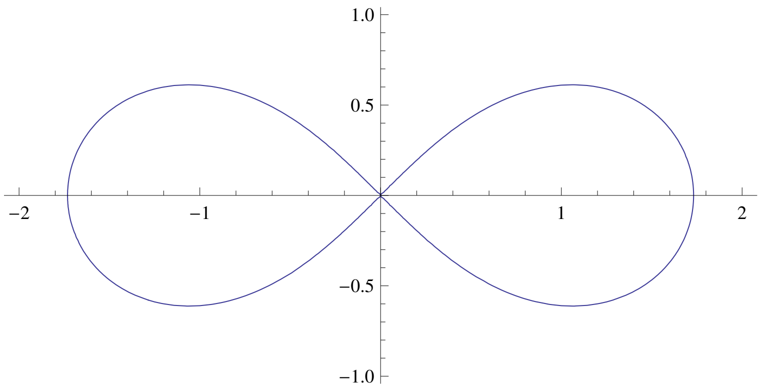


FIGURE 7.15: lemniscate (a=1)

11. La conchoïde de Nicomède est la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation
$$\rho = 1 + \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\ .$$
    — Cherchez la tangente au point de la conchoïde correspondant à $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donnez les équations paramétriques et l'équation cartésienne de la tangente.
    — Faites de même en $\theta = 0$.
    — Revenons à la conchoïde. Quelle symétrie voit-on dans la conchoïde ? En faisant varier θ et en déduisant comment varie ρ, tracez la conchoïde.
12. Soit a une constante réelle > 0. Les équations paramétriques de l'astroïde sont
$$\begin{cases} x & = a\cos^3(t) \\ y & = a\sin^3(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad -\pi \leq t \leq \pi\ .$$
    Cherchez la tangente à l'astroïde au point correspondant à $t = \frac{\pi}{3}$. En utilisant la méthode vue plus haut, peut-on chercher la tangente au point correspondant à $t = 0$?

Chapitre 8

Espace à n dimensions

8.1 Espace réel et hyperréel à n dimensions

Ici n représente un naturel ≥ 2.

On a déjà considéré le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et le plan hyperréel ${}^*\mathbb{R}^2$. Cela s'étend naturellement à la dimension 3 et plus généralement à la dimension n. $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de toutes les listes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels et ${}^*\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de toutes les listes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres hyperréels. Le nombre x_k est appelé la k^e *coordonnée* du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ainsi, dans $\mathbb{R}^n$ les coordonnées des points sont des réels et dans ${}^*\mathbb{R}^n$ les coordonnées des points sont des hyperréels. Comme dans l'espace à deux dimensions, les points de ${}^*\mathbb{R}^n$ sont désignés par des lettres grasses, si on utilise les lettres $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, on convient que x_k, y_k, z_k représentent respectivement la k^e coordonnée de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.

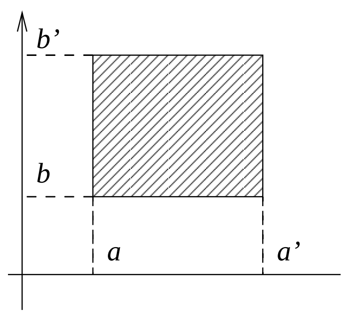


FIGURE 8.1: $[a, a'] \times [b, b']$

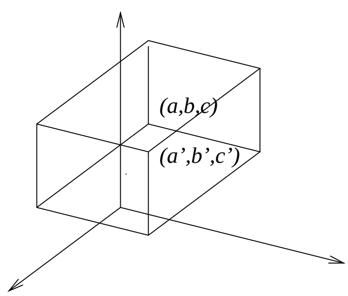


FIGURE 8.2: $[a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$

Soient A, B, C des parties de $\mathbb{R}$ ou ${}^*\mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(u, v) \,:\, u \in A \text{ et } v \in B\}, \\ A \times B \times C &:= \{(u, v, w) \,:\, u \in A \text{ et } v \in B \text{ et } w \in C\}. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout naturel n non nul, $A_1 \times A_2 \times \dots A_n$ est l'ensemble des listes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que chaque x_i est dans A_i. Ainsi $[a, a'] \times [b, b']$ est le rectangle du plan réel représenté sur la figure 8.1 et $[a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$ représente le parallélépipède rectangle représenté sur la figure 8.2.

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$ ou de ${}^*\mathbb{R}^n$, la distance entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est donnée par

$$\boxed{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}} \,. \tag{8.1}$$

Muni de cette distance, $\mathbb{R}^n$ est appelé l'**espace euclidien** ou l'**espace réel à** n **dimension** et ${}^*\mathbb{R}^n$ l'**espace hyperréel à** n **dimensions**. La distance d'un point $\mathbf{x}$ à l'origine est aussi appelée la norme de ce point et est notée $\|\mathbf{x}\|$, autrement dit

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \,.$$

Les définitions et propriétés vues à propos du plan hyperréel à la section 6.7 s'étendent naturellement à l'espace hyperréel de dimension n. Ainsi on définit :

un point de ${}^*\mathbb{R}^n$ *est limité lorsque sa norme est un nombre limité. Deux points* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *de* ${}^*\mathbb{R}^n$ *sont infiniment proches, en abrégé* $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ *, lorsque leur distance est infiniment petite.*

On a encore :

un point de ${}^*\mathbb{R}^n$ *est limité si et seulement si toutes ses coordonnées sont limitées. Deux points de* ${}^*\mathbb{R}^n$ *sont infiniment proches si et seulement si leurs coordonnées respectives sont infiniment proches. Deux points de* $\mathbb{R}^n$ *sont* $\approx$ *si et seulement si ils sont égaux.*

La notion de partie standard s'étend de la même façon, de même pour la monade :

tout point $\mathbf{x}$ *limité de* ${}^*\mathbb{R}^n$ *est infiniment proche d'un et d'un seul point de* $\mathbb{R}^n$*, appelé évidemment la partie standard (ou la partie observable) de* $\mathbf{x}$ *et noté* $\mathrm{st}(\mathbf{x})$ *, de plus* $\mathrm{st}(\mathbf{x}) = (\mathrm{st}(x_1), \dots, \mathrm{st}(x_n))$*. La monade ou halo d'un point* $\mathbf{x_0}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est l'ensemble de tous les points de* ${}^*\mathbb{R}^n$ *infiniment proches de* $\mathbf{x_0}$*.*

Par exemple soit ε ip non nul et considérons les points suivants de ${}^*\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (1-\varepsilon, -1+3\varepsilon, 2-\varepsilon+\varepsilon^2, -3+100\varepsilon) \\
\mathbf{y} &= (1+3\varepsilon, -1, 1+\varepsilon, 2\varepsilon) \\
\mathbf{z} &= (1+5\varepsilon^2, -1-\varepsilon, 2+5\varepsilon, -3-3\varepsilon) \\
\mathbf{w} &= (1-\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}, 2+\varepsilon, -1) \,.
\end{aligned}$$

Alors $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ sont limités, les points $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ sont infiniment proches mais ne sont pas infiniment proches de $\mathbf{y}$, de plus

$$\mathrm{st}(\mathbf{x}) = \mathrm{st}(\mathbf{z}) = (1, -1, 2, -3) \text{ et } \mathrm{st}(\mathbf{y}) = (1, -1, 1, 0) \,;$$

par contre le point $\mathbf{w}$ n'est pas limité et n'a donc pas de partie standard, en effet sa deuxième coordonnée est infiniment grande.

De la même façon, si Δ est ip $\neq 0$, la relation $\approx_\Delta$ et la propriété 18 (page 94) s'étendent aussi à $^*\mathbb{R}^n$, on peut étendre naturellement la définition et l'utilisation du microscope de grossissement $1/\Delta$ à $^*\mathbb{R}^n$.

On additionne des points de $\mathbb{R}^n$ et $^*\mathbb{R}^n$ en effectuant l'opération sur chacune des coordonnées : Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans $^*\mathbb{R}^n$ et soit λ un hyperréel, on définit $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ et $\lambda\mathbf{x}$ en posant

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} := (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \qquad , \qquad \lambda\mathbf{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \, .$$

De la sorte $\mathbb{R}^n$, $^*\mathbb{R}^n$ forme des espaces vectoriels sur le corps des réels, respectivement le corps des hyperréels.

8.2 Utilisation des fonctions réelles de plusieurs variables dans les hyperréels

On sait que toute fonction réelle f d'une ou plusieurs variables s'étend en une fonction hyperréelle appelée l'extension standard de f et notée encore f . L'ensemble de définition d'une fonction réelle de n variables est une partie de $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble de définition de son extension standard est une partie de $^*\mathbb{R}^n$. Ce qui a été dit pour les fonctions réelles d'une variable au chapitre 4, s'étend aux fonctions réelles de n variables.

Par exemple : soit h la fonction réelle de deux variables définie par

$$h(x,y) := \arcsin(x+y) \, , \tag{8.2}$$

alors l'équation $h(x,y) = h(x,y)$ a dans les réels les mêmes solutions que le système standard

$$-1 \leq x+y \leq 1 \qquad ; \tag{8.3}$$

il en est donc de même dans les hyperréels, d'où $h(x,y)$ est défini dans les hyperréels lorsque (8.3) est vérifié. De plus dans les réels l'équation $h(x,y) = \arcsin(x+y)$ a les mêmes solutions que $-1 \leq x+y \leq 1$, il en est donc de même dans $^*\mathbb{R}$. Pour tous hyperréels x, y tels que $-1 \leq x+y \leq 1$, on a donc $h(x,y) = \arcsin(x+y)$. En général :

Soit f une fonction réelle de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- *Si dans les réels l'ensemble de définition de f est composé des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant un système standard $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alors l'ensemble de définition de l'extension standard de f est composé des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $^*\mathbb{R}^n$ vérifiant le même système $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*
- *Si dans les réels les valeurs de f se calculent au moyen d'un système standard, les valeurs de f dans les hyperréels se calculent au moyen du même système standard.*

8.3 Extension standard des parties de $\mathbb{R}$, ... de $\mathbb{R}^n$.

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ s'étend en un intervalle ${}^*I$ de ${}^*\mathbb{R}$ en prenant les mêmes inéquations que dans $\mathbb{R}$. Nous avons aussi vu que le graphe d'une fonction réelle et que toute droite de $\mathbb{R}^2$ se prolongeait dans ${}^*\mathbb{R}^2$ et cela en prenant la même équation que dans $\mathbb{R}^2$. Cela est un cas particulier d'une notion plus générale : nous allons voir que pour toute partie A de l'espace réel à une, deux, ..., n dimensions a une extension ${}^*A$ dans l'espace hyperréel de même dimension. Nous allons faire de même pour tout ensemble de l'espace réel caractérisé par un système standard :

Soit $S_1(x)$ un système standard. Si A est l'ensemble des réels x vérifiant $S_1(x)$, alors ${}^*A$ représente l'ensemble des hyperréels x vérifiant le même système standard $S_1(x)$.

Soit $S_2(x,y)$ un système standard. Si B est l'ensemble des points (x,y) du plan $\mathbb{R}^2$ tels que le système $S_2(x,y)$ soit vérifié, alors ${}^*B$ représente l'ensemble des points (x,y) du plan hyperréel tels que $S_2(x,y)$ soit vérifié.

Plus généralement, soit $S(x_1,\ldots,x_n)$ un système standard de n variables. Si E est l'ensemble des points $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que le système $S(x_1,\ldots,x_n)$ soit vérifié, alors ${}^*E$ représente l'ensemble des points $(x_1,\ldots,x_n)$ de ${}^*\mathbb{R}^n$ tels que $S(x_1,\ldots,x_n)$ soit vérifié.

*${}^*E$, ${}^*A$, ${}^*B$ s'appellent l'**extension standard** de E, A, de B.*

Par exemple soit T le triangle du plan $\mathbb{R}^2$ de sommets $(-2,0)$, $(2,0)$ et $(0,2)$, alors T est l'ensemble des points (x,y) du plan $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées vérifient le système

$$y \geq 0 \quad , \quad x+y \leq 2 \quad , \quad y-x \leq 2 \, ,$$

alors ${}^*T$ est l'ensemble des points (x,y) de ${}^*\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées vérifient le même système. Par exemple, si ε est ip >0, les points $(\frac{1}{2}+\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)$ sont dans ${}^*T$ tandis que les points $(2-\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $(1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ne sont pas dans ${}^*T$.

De même dans l'espace à trois dimensions, désignons par S la sphère de centre l'origine de rayon r (réel >0), autrement dit S est composé des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$, alors ${}^*S$ est composée des points (x,y,z) de ${}^*\mathbb{R}^3$ tels que $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$.

Montrons que l'extension standard ne change pas si on caractérise l'ensemble de l'espace réel par un autre système standard. Par exemple, considérons une partie A de $\mathbb{R}^2$ pouvant être caractérisée par un système standard $S_1(x,y)$ et aussi par un système standard $S_2(x,y)$. Alors dans les réels les systèmes $S_1(x,y)$ et $S_2(x,y)$ sont équivalents, il en est donc de même dans les hyperréels, ainsi l'extension ${}^*A$ obtenue en utilisant $S_1(x,y)$ est la même que celle obtenue en utilisant $S_2(x,y)$. Cela est évidemment indispensable pour valider la définition de l'extension standard ${}^*A$ car cela montre que l'extension standard ne dépend pas du système standard choisi pour décrire A.

Ci-dessus on a vu qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ qui était caractérisé par un système standard, avait une extension standard. En fait

> **toute partie de $\mathbb{R}^n$, en particulier tout ensemble de nombres réels, a une extension standard.**

Pour voir cela utilisons la fonction caractéristique d'un ensemble. Pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, on peut considérer la **fonction caractéristique** de A, notée δ_A qui est la fonction qui vaut 1 en tout point de A et 0 en tout point de $\mathbb{R}^n$ ne se trouvant pas dans A. La fonction δ_A est une fonction réelle de n variables, comme telle elle s'étend à ${}^*\mathbb{R}^n$. Remarquons que A est exactement l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\delta_A(x_1, \ldots, x_n) = 1\,, \tag{8.4}$$

l'ensemble A peut donc être caractérisé dans $\mathbb{R}^n$ au moyen de la seule formule standard (8.4). Par conséquent, **l'extension standard ${}^*A$ existe** et est l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_n)$ de ${}^*\mathbb{R}^n$ tels que $\delta_A(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

Etablissons quelques propriétés simples et naturelles de l'extension standard. Raisonnons par exemple pour des ensembles de l'espace à deux dimensions. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Pour tous réels x, y, on a

$$\delta_A(x, y) \cdot (1 - \delta_A(x, y)) = 0\ ,$$

il en est donc de même pour tout x, y hyperréels, et on a donc $\delta_A(x, y) = 0$ ou $\delta_A(x, y) = 1$. Il s'ensuit :

$$\delta_A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in {}^*A\,, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin {}^*A\,. \end{cases}$$

Par conséquent *l'extension standard de δ_A est la fonction caractéristique de ${}^*A$ dans ${}^*\mathbb{R}^n$* .

Si une fonction réelle $f(x, y)$ a pour ensemble de définition A, alors dans $\mathbb{R}$ les formules standard $f(x, y) = f(x, y)$ et $\delta_A(x, y) = 1$ sont équivalentes, il en est donc de même dans ${}^*\mathbb{R}$, d'où :
si dans les réels l'ensemble de définition d'une fonction réelle f est un ensemble A, alors l'ensemble de définition de l'extension standard de f est l'ensemble ${}^*A$.

Le passage de A à son extension ${}^*A$ respecte les opérations ensemblistes : *si A, B sont des parties de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\boxed{{}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B \quad , \quad {}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B \quad , \quad {}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B}\ .$$

Ces propositions se prouvent en utilisant les fonctions caractéristiques et en appliquant le Principe de transfert.

On obtient ainsi une nouvelle extension du Principe de transfert : dans un système standard, on peut inclure des formules de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ ou de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \notin A$, en effet la première est équivalente à la formule standard $\delta_A(x_1, \ldots, x_n) = 1$ et la seconde à la formule standard $\delta_A(x_1, \ldots, x_n) = 0$, mais

dans les hyperréels on interprète la formule $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ par $(x_1, \ldots, x_n) \in {}^*A$ et la formule $(x_1, \ldots, x_n) \notin A$ par $(x_1, \ldots, x_n) \notin {}^*A$.

8.4 Dérivées partielles

Considérons une fonction réelle $f(x, y)$ de deux variables. Fixons une des variables en lui donnant une valeur réelle, par exemple soit y fixé et réel, on obtient la fonction réelle d'une seule variable $x \mapsto f(x, y)$. On peut envisager la dérivée de cette fonction et cette dérivée est appelée la **dérivée partielle** de f par rapport à x, cette dérivée est notée f'_x ou encore [1] $\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_x f$. Autrement dit, en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$,

$$\boxed{f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}\right)}$$

où Δx est infiniment petit quelconque non nul, cette dérivée existe si le quotient différentiel est défini et limité, et a sa partie standard indépendante de Δx.
De même on peut fixer x réel et on obtient la fonction $y \mapsto f(x, y)$. La **dérivée partielle** de f par rapport à y, notée f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou $D_y f$, est la dérivée de cette fonction, autrement dit

$$\boxed{f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}\right)}$$

pour tout Δy infiniment petit non nul et moyennant les mêmes conditions d'existence que ci-dessus.

Dans le calcul de f'_x la variable y se comporte donc comme une constante ; de même dans le calcul de f'_y la variable x se comporte comme une constante. En particulier $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$.

Par exemple

$$\frac{\partial \sin(x^2 - y^3)}{\partial x} = 2x \cos(x^2 - y^3)\ , \quad \frac{\partial \sin(x^2 - y^3)}{\partial y} = -3y^2 \cos(x^2 - y^3)\ .$$

Plus généralement la notion de dérivée partielle s'applique aux fonctions réelles de n variables $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, on obtient alors n dérivées partielles notées

$$f'_{x_k} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad , \qquad D_{x_k} f\ .$$

f'_{x_k} est donc la dérivée de la fonction $x_k \mapsto y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ obtenue en assignant à chacune des autres variables x_j une valeur réelle fixée.

D'après leur définition les dérivées partielles peuvent être considérées comme des dérivées d'une fonction d'une seule variable, les règles de calcul de celles-ci leur sont donc applicables.

8.5 Continuité de fonctions de plusieurs variables

On étend maintenant la notion de continuité vue pour les fonctions d'une variable. Considérons une fonction réelle de deux variables, par exemple

$$f(x, y) := \sqrt{x - y}\ .$$

1. la notation f_x est aussi utilisée dans de nombreux ouvrages.

Dans les réels l'ensemble de définition D est le demi-plan caractérisé par $x \geq y$, dans les hyperréels l'ensemble de définition ${}^*D$ est composé des points (x, y) de ${}^*\mathbb{R}^2$ vérifiant la même inégalité $x \geq y$. Fixons un point $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ dans D. Si $\mathbf{p} = (x, y)$ est un point de ${}^*D$ et si $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_0$, on a $\mathrm{st}(x) = x_0$ et $\mathrm{st}(y) = y_0$ et donc

$$\mathrm{st}(\sqrt{x-y}) = \sqrt{\mathrm{st}(x) - \mathrm{st}(y)} = \sqrt{x_0 - y_0}\ ,$$

ainsi $f(x, y) \approx f(x_0, y_0)$. Pour exprimer cela on dit que f ou $f(x, y)$ est *continue* dans D. Plus généralement :

Définition. *Soit f une fonction réelle de n variables et E un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$. Alors f (ou $f(x_1, \ldots, x_n)$) est* ***continue*** *dans E lorsque lorsque pour tout point $(a_1, \ldots, a_n)$ de E*

— *$f(a_1, \ldots, a_n)$ est définie,*
— *pour tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ dans ${}^*E$ tel que $(x_1, \ldots, x_n) \approx (a_1, \ldots, a_n)$, on a $f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(a_1, \ldots, a_n)$.*

Puisque deux points sont infiniment proches si et seulement si leurs coordonnées respectives sont infiniment proches, les fonctions "coordonnées" $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto x_k$ sont continues dans $\mathbb{R}^n$.

Les règles connues pour les sommes, produits et fractions de fonctions continues d'une variable sont bien entendu maintenues pour les fonctions continues de plusieurs variables. Il en est de même pour la continuité des fonctions composées :
si $f(x)$ est continue dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et si $g(x_1, \ldots, x_n)$ est continue dans une partie E de $\mathbb{R}^n$, et si $g(x_1, \ldots, x_n) \in J$ pour tout point $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, alors $f(g(x_1, \ldots, x_n))$ est continue dans E.

En utilisant conjointement ces règles et la continuité des fonctions "coordonnées" on obtient aisément des fonctions continues de plusieurs variables. Ainsi tout polynôme de deux variables (c'est-à-dire toute somme d'expressions de la forme cx^py^q où p, q sont des naturels) est continue dans $\mathbb{R}^2$; toute fraction de deux polynômes de 2 variables est continue dans $\mathbb{R}^2$ excepté où le dénominateur s'annule. Par exemple,

$\frac{x^2y+2y^2}{x+y}$ est continue dans $\mathbb{R}^2$ excepté sur la droite d'équation $x + y = 0$;

$\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est continue dans $\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ c'est-à-dire dans le disque de centre l'origine et de rayon 2 ;

$\arcsin(y - 2x)$ est continue dans $\{(x, y)\ :\ -1 \leq y - 2x \leq 1\}$ c'est-à-dire dans la bande du plan compris entre les droites $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.

Il ne faut toutefois pas penser que tous les résultats concernant les fonctions d'une variable se transposent directement pour les fonctions de plusieurs variables. Ainsi on sait que toute fonction d'une seule variable dérivable en un réel est continue en ce réel, mais on peut trouver des fonctions de plusieurs variables dont les dérivées partielles existent en un point et qui ne sont pas continues en ce point ! C'est le cas de la fonction suivante :

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}\ .$$

En dehors de l'origine, cette fonction est certainement continue et les dérivées partielles existent. Envisageons maintenant le cas de l'origine. Cherchons f'_x à l'origine : pour tout Δx infiniment petit non nul, $f(0+\Delta x, 0) = 0$ et donc le quotient différentiel est

$$\frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0 \ ,$$

d'où $f'_x(0,0) = 0$. De même $f'_y(0,0) = 0$. Considérons maintenant la droite $y = \lambda x$, où λ est un réel non nul, et sur cette droite prenons le point $(\Delta x, \lambda\Delta x)$ où Δx est un infiniment petit $\neq 0$. Ce point est infiniment proche de l'origine et on a

$$f(\Delta x, \lambda \Delta x) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \ ,$$

cette valeur est un réel non nul et n'est donc pas infiniment proche de $f(0,0)$. Ainsi bien que $(\Delta x, \lambda\Delta x) \approx (0,0)$ on a que $f(\Delta x, \lambda\Delta x) \not\approx f(0,0)$, la fonction f n'est donc pas continue à l'origine. En fait cela n'est pas étonnant, car lorsqu'on considère les deux dérivées partielles en un point (x_0, y_0) on se déplace uniquement au départ de (x_0, y_0) dans des directions parallèles aux axes, par exemple pour $f'_x(x_0, y_0)$ on considère $f(x_0+\Delta x, y_0)$ et on se déplace donc parallèlement à l'axe des x ; par contre lorsqu'on envisage la continuité on envisage tous les points (x, y) infiniment proches de (x_0, y_0). Bien entendu cette différence ne peut se présenter lorsqu'on a une seule variable.

8.6 Exercices

1. Cherchez les dérivées partielles des fonctions suivantes, dans quelle partie du plan ce calcul est-il valable ? Où ces fonctions sont-elles continues. Représentez sur un dessin les parties du plan ainsi trouvées.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &:= \frac{x}{y} & f_2(x,y) &:= \sin(x+y^2) \\ f_3(x,y) &:= \sqrt{x^2+4y^2-16} & f_4(x,y) &:= \arcsin(x+y) \\ f_5(x,y) &:= \mathrm{tg}(x+2y) & f_6(x,y) &:= \mathrm{arctg}(x+y^2) \end{aligned}$$

2. En utilisant la *définition* des dérivées partielles, cherchez $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en prenant

$$f(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2-4} \ .$$

Précisez où ces dérivées partielles existent.

3. Soit $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0)$ un point fixé dans $\mathbb{R}^2$. On considère la fonction qui à un point quelconque $\boldsymbol{p} = (x, y)$ du plan associe la distance de $\boldsymbol{p}$ à $\boldsymbol{p}_0$. Prouver que cette fonction est continue dans $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles en tout point différent de $\boldsymbol{p}_0$, cherchez ces dérivées partielles. Faites de même dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 9

Nombres hypernaturels

Les nombres hypernaturels vont être des nombres qui se comporteront comme les naturels mais parmi lesquels on trouvera des infiniment grands. Voyons comment on les introduit.

9.1 Nombres hypernaturels

Utilisons la fonction **partie entière** $x \longmapsto [x]$ bien connue dans les réels ; rappelons que si r est un réel, la partie entière de r, notée $[r]$, est le plus grand entier $\leq r$. Cette fonction permet de caractériser aisément les entiers et les naturels : si x est un réel, le nombre x est un entier ssi $[x] = x$, et par conséquent

dans les réels le nombre x est un naturel si et seulement si

$$[x] = x \text{ et } x \geq 0 \ .$$

On sait aussi que toute fonction réelle s'étend en une fonction hyperréelle, en particulier la fonction "*partie entière*" $x \in \mathbb{R} \longmapsto [x]$ s'étend en une fonction hyperréelle $x \in {}^*\mathbb{R} \longmapsto [x]$ définie sur tous les nombres hyperréels. Dès lors :

Définition. *Les nombres **hypernaturels** sont les nombres hyperréels tels que*

$$[x] = x \quad , \quad x \geq 0 \tag{9.1}$$

Dorénavant le système (9.1) sera noté $\mathbb{N}(x)$, par conséquent :
— *les naturels sont les réels x qui vérifient* $\mathbb{N}(x)$ *,*
— *les hypernaturels sont les hyperréels x qui vérifient* $\mathbb{N}(x)$ *.*

Nous allons maintenant montrer que les hypernaturels ainsi définis conservent les propriétés typiques des naturels, cela justifiera évidemment le bien fondé de la définition ci-dessus. Evidemment :

1. *Tous les naturels sont des hypernaturels.*
2. *Tous les hypernaturels sont* ≥ 0 *.*

Dans les réels $[x+1]=[x]+1$, il en est donc de même dans $^*\mathbb{R}$. Si m est un hypernaturel, on a donc

$$[m+1]=[m]+1=m+1$$

et $m+1$ est donc aussi un hypernaturel. Par conséquent :

3. Si m est un hypernaturel, alors $m+1$ est aussi un hypernaturel

On sait qu'entre les naturels m et $m+1$ il n'y a pas d'autre naturel, autrement dit dans les réels le système

$$\mathbb{N}(m)\ ,\ \mathbb{N}(k)\ ,\ m\leq k<m+1$$

entraîne $m=k$, il en est donc de même dans les hyperréels, d'où

4. Entre les hypernaturels m et $m+1$ il n'y a pas d'autres hypernaturels.

Dans les réels, $x\geq 0$ entraîne

$$[x]\geq 0\ ,\ [[x]]=[x]\ ,\ [x]\leq x<[x]+1$$

il en est donc de même dans les hyperréels, d'où

5. Pour tout hyperréel $x\geq 0$, le nombre $[x]$ est un hypernaturel tel que

$$[x]\leq x<[x]+1\,.$$

Les résultats ci-dessus montrent que les hypernaturels conservent de nombreuses propriétés des naturels. Mais on veut aussi des nombres qui se comportent comme les naturels et qui soient ig. D'après le résultat ci-dessus, il est facile de trouver de tels nombres : en prenant H ig positif, le nombre $[H]+1$ est un hypernaturel supérieur à l' ig H et est donc lui-même ig, d'où :

6. Il existe des hypernaturels infiniment grands. Plus précisément, si H est ig >0, alors $[H]$ est un hypernaturel infiniment grand.

Intéressons-nous aux hypernaturels qui ne sont pas des naturels, montrons que forcément ils sont ig. En effet soit m un hypernaturel non nul limité. Il existe donc un réel $r>m$, il existe donc aussi un naturel $>m$. Prenons le plus petit naturel $>m$, il est ≥ 1, notons-le $q+1$. Alors q est un naturel et $q\leq m<q+1$. Vu la propriété 4 ci-dessus,on $m=q$ et m est donc un naturel. On a ainsi prouvé :

7. Tout hypernaturel est soit un naturel soit un infiniment grand positif.

9.2 Suites et limites de suites

Une suite de nombres est une collection de nombres indicés par tous les naturels supérieurs ou égaux à un naturel fixé k_0, par exemple

$$(\frac{1}{k+1})$$

représente la suite

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{k+1},\ldots$$

En général une suite est représentée par la notation (x_k), le nombre k est l'**indice** et le nombre x_k est le **terme d'indice** k. Par exemple si on considère la suite

$$\left(\frac{1}{k-3}\right) \tag{9.2}$$

le premier indice est 4.

On considère ici des suites de nombres réels, autrement dit pour chaque naturel $k \geq k_0$ le terme x_k est réel. Remarquons qu'une suite peut alors être envisagée comme une fonction réelle, ainsi la suite (9.2) peut être considérée comme étant la fonction qui à chaque naturel $k \geq 4$ associe le nombre $\frac{1}{k-3}$. Plus généralement la suite (x_k) de premier indice k_0 peut-être envisagée comme étant la fonction qui à chaque naturel $k \geq k_0$ associe le nombre x_k. En considérant l'extension standard de la fonction réelle $k \mapsto x_k$, on voit que cette fonction est aussi définie pour tout k hypernaturel $\geq k_0$, dès lors *le terme x_k est aussi défini pour tout hypernaturel $k \geq k_0$ et donc pour tout hypernaturel k ig.*

Quand on est en présence d'une suite, une question se pose naturellement : que se passe-t-il lorsque l'indice devient de plus en plus grand. Les termes de la suite vont-ils tendre vers un nombre bien précis ? Les nombres de la suite vont-ils devenir arbitrairement grands ? .... Aussi on va considérer les termes de la suite lorsque l'indice k est ig, on envisagera alors la *limite de la suite.* De la sorte on raisonne comme pour la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors x parcourait tous les hyperréels ig > 0, maintenant l'indice k va parcourir les hypernaturels ig. Par exemple considérons les trois suites suivantes :

$$u_k := \frac{2k}{k+1} \quad , \quad v_k := \frac{1}{k^3} \quad , \quad w_k := k^2 .$$

Pour tout hypernaturel k ig on a

$$u_k \approx 2 \quad , \quad v_k \approx 0 \quad , \quad w_k \quad ig > 0 \quad .$$

Dès lors on dit que la limite de la suite (u_k) est 2, que la limite de la suite (v_k) est 0 et que la limite de la suite (w_k) est $+\infty$. Plus généralement, on définit les limites de suite comme suit :

— *la **limite de la suite** (x_k) est un réel r (ou x_k **tend vers** r), en abrégé*

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = r ,$$

*lorsque $x_m \approx r$ pour tout m hypernaturel ig, alors la suite est dite **convergente**.*

— *la **limite de la suite** (x_k) est $+\infty$, respectivement $-\infty$, en abrégé*

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty, \ \textit{respectivement} \ -\infty ,$$

lorsque pour tout m hypernaturel ig le nombre x_m est un ig > 0, respectivement un ig < 0.

Des limites de fonctions on déduit directement de nombreuses limites de suites :

si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *existe, alors la limite de la suite* $(f(k))$ *vaut* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Ainsi puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$, la limite de la suite $(\frac{2k+1}{k-3})$ vaut également 2.

Mais on peut aussi considérer des limites de suites qui ne sont pas [1] des cas particuliers de limites de fonctions. Ainsi soit a un réel > 1, cherchons la limite de la suite $(\sqrt[k]{a})$. Prenons d'abord k naturel non nul. Remarquons $\sqrt[k]{a} > 1$, posons $u_k := \sqrt[k]{a} - 1$. De la sorte $u_k > 0$. De plus $\sqrt[k]{a} = 1 + u_k$ et donc

$$a = (u_k + 1)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, u_k^j > C_k^1 \, u_k = k \, u_k \, .$$

Il s'ensuit

$$0 < u_k < \frac{a}{k} \, . \tag{9.3}$$

Vu la Règle de transfert, il en est de même si k est un hypernaturel. En particulier, si k est un hypernaturel ig, de (9.3) il découle que u_k est ip et donc $\sqrt[k]{a} \approx 1$. Il s'ensuit

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a} = 1 \, .$$

Cherchons encore la limite de la suite $(k!)$. Pour tout naturel k on a $k \leq k!$, il en est donc de même pour tous les hypernaturels ; en particulier , si k est un hypernaturel ig, le nombre $k!$ est donc ig > 0, par conséquent

$$\lim_{k\to+\infty} k! = +\infty \, .$$

Voici un critère de convergence très utile :

Théorème 20 (Critère des suites monotones)**.**
Toute suite de réels décroissante et bornée inférieurement (resp. croissante et bornée supérieurement) par un réel r *converge vers un réel* $\geq r$ *(resp.* $\leq r$*).*

Démonstration. Considérons la suite de réels (u_n) décroissante et bornée inférieurement par un réel r. Alors pour tous naturels m, n, l'inégalité $m < n$ entraîne $r \leq u_n \leq u_m$. D'après le Principe de transfert il en est de même pour tous hypernaturels m, n.

Prenons deux hypernaturels p, q infiniment grands tels que $p < q$. Alors

$$r \leq u_q \leq u_p \leq u_n \text{ pour tout naturel } n \quad .$$

Montrons que $u_p \approx u_q$. Supposons $u_p \not\approx u_q$. On pourrait alors trouver un réel r' tel que $u_q < r' < u_p$. Alors, pour tout naturel n , on aurait $r' < u_n$, et d'après le Principe de transfert, on aurait également $r' < u_m$ pour tout hypernaturel m. Mais cela est impossible puisque $u_q < r'$. Par conséquent on doit avoir $u_p \approx u_q$.

De plus tous les u_k sont compris entre r et u_0, tous les u_k sont donc limités. Par conséquent, tous les u_k pour k infiniment grand ont la même partie standard L et la suite u_n converge donc vers L . Puisque $r \leq u_k$, on a $r \leq \mathrm{st}(u_k) = L$. □

1. du moins pour l'instant

Par exemple, soit a un réel > 1, alors la suite $(a^{1/m})$ est décroissante et bornée inférieurement par 1, cette suite converge donc vers un réel ≥ 1 (en fait, comme on pourra le voir plus tard, cette suite vers 1) .

9.3 Extension de la notion de somme

On sait considérer une somme qui a un nombre fini de termes. Montrons maintenant comment on peut considérer une somme d'une infinité de nombres, nous allons voir comment (moyennant certaines conditions) on peut considérer la somme

$$\sum_{k=m}^{n} t_k = t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n$$

où m et n sont des hypernaturels ($m \leq n$), une telle somme aura une infinité de termes si le nombre de termes $n - m + 1$ est infiniment grand.

Envisageons d'abord deux exemples.

Exemple 1 $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ *où* m *est un hypernaturel* ≥ 1 *.*

Lorsque m est un naturel non nul, posons

$$S(m) := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} ,$$

on définit ainsi une fonction réelle $m \mapsto S(m)$ définie pour tout réel m satisfaisant le système

$$\mathbb{N}(m) \ , \ m \geq 1 \ .$$

D'après le Principe de transfert, cette fonction s'étend en une fonction hyperréelle définie pour tout hyperréel m vérifiant le même système, on peut ainsi considérer l'expression $S(m)$ pour tout hypernaturel $m \geq 1$, cela permet d'écrire $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ pour tout hypernaturel $m \geq 1$, en particulier pour tout hypernaturel ig.

Exemple 2 $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(k+\varepsilon)^2}$ *où* m *est un hypernaturel et* ε *un ip* > 0*.*

Lorsque m est un naturel et u est un réel > 0 posons

$$S(m, u) := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(k+u)^2} ,$$

on définit ainsi une fonction réelle $(m, u) \mapsto S(m, u)$ définie pour tous m, u réels satisfaisant le système

$$\mathbb{N}(m) \ , \ u > 0 \ , \tag{9.4}$$

d'après le Principe de transfert, cette fonction s'étend en une fonction hyperréelle définie pour tous m, u hyperréels vérifiant le même système (9.4). Pour tout hypernaturel m, on peut ainsi considérer l'expression $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(k+\varepsilon)^2}$ comme étant $S(m, \varepsilon)$.

Au travers de ces deux exemples, on voit que les termes $t_0, t_1, \ldots, t_k \ldots, t_m$ peuvent être donnés au moyen d'une expression dépendant du seul indice k (exemple 1) ou dépendant en plus de k d'un paramètre hyperréel (exemple 2). Envisageons maintenant le cas général. A propos des termes t_k de la somme, supposons :

les termes t_k, où k varie parmi les hypernaturels, sont de la forme $T(k)$ ou $T(k, w)$ où T est l'extension standard d'une fonction réelle et w est, s'il est présent, un paramètre hyperréel.

Voyons comment alors définir la somme $\sum_{k=m}^{n} t_k$ quels que soient les hypernaturels m, n où $m \leq n$. Envisageons par exemple le cas où

$$t_k = T(k, w)$$

où w est un paramètre hyperréel supposé par exemple être > 0.

Pour tous naturels m, n tels que $m \leq n$ et pour tout réel $u > 0$, posons

$$\boxed{S(m, n, u) := \sum_{k=m}^{n} T(k, u)} \,.$$

Ci-dessus la somme est bien définie car elle a un nombre fini de termes. De la sorte on obtient une fonction réelle $S \ : \ (m, n, u) \mapsto S(m, n, u)$ définie pour tous m, n, u réels vérifiant le système

$$\begin{cases} \mathbb{N}(m) \ , \ \mathbb{N}(n) \\ m \leq n \ , \ 0 < u \end{cases} \tag{9.5}$$

D'après le Principe de transfert, cette fonction s'étend en une fonction hyperréelle définie pour tous m, n, u hyperréels vérifiant le même système (9.5), on peut ainsi considérer l'expression $S(m, n, u)$ **pour tous hypernaturels** m, n **tels que** $m \leq n$ **et pour tout hyperréel** $u > 0$. Il est dès lors normal d'étendre la définition de la somme en posant pour m,n **hypernaturels**

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} t_k := S(m, n, w) \,.}$$

Bien entendu, il se peut que le premier indice pour lequel t_k est défini, soit 1 ou un autre naturel > 0, on procède alors de la même façon en imposant ci-dessus à m et n d'être supérieurs au premier indice.

Pour que cette définition soit pertinente, il faut que ce que nous avons appelé "*somme*" conserve bien les propriétés des sommes que nous connaissions avant. Comme on va le voir il en est bien ainsi. Rappelons d'abord les propriétés classiques des sommes ayant un nombre fini de termes.

Les deux propriétés de base sont :

1. *une somme ayant un seul terme est égal à ce terme.*
2. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n+1} t_k = \sum_{k=m}^{n} t_k + t_{n+1} \,.$

On connaît d'autres propriétés :

3. $\sum_{k=m}^{n}(t_k + t'_k) = \sum_{k=m}^{n} t_k + \sum_{k=m}^{n} t'_k$ et $\sum_{k=m}^{n} \lambda t_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} t_k$,
4. $|\sum_{k=m}^{n} t_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |t_k|$,
5. $\sum_{k=m}^{n} t_k + \sum_{k=n+1}^{p} t_k = \sum_{k=m}^{p} t_k$ si $m \leq n < p$,
6. *si tous les termes t_k sont égaux à une même valeur t,*
$$\sum_{k=m}^{n} t = (n - m + 1) \cdot t \ ,$$
7. si $t_k \leq t'_k$ pour chaque k, alors $\sum_{k=m}^{n} t_k \leq \sum_{k=m}^{n} t'_k$.

Comme nous allons le voir, **ces propriétés sont ici conservées, l'utilisation de l'appellation "somme" est donc légitime**.

A titre d'exemple envisageons les propriétés 2 et 4 et considérons encore le cas où $t_k = T(k, w)$ avec $w > 0$. Appliquons simplement le Principe de transfert. Si m, n sont des naturels et si u est un réel > 0, posons

$$S(m, n, u) := \sum_{k=m}^{n} T(k, u) \ \text{ et } \ S'(m, n, u) := \sum_{k=m}^{n} |t_k(u)| \ .$$

On sait que, si m, n, u sont réels, le système (9.5) entraîne

$$S(m, n+1, u) = S(m, n, u) + T(n+1, u) \ \text{ et } \ |S(m, n, u)| \leq S'(m, n, u) \ ,$$

vu le Principe de transfert il en est de même pour tous hyperréels m, n, u, d'où

$$\sum_{k=m}^{n+1} T(k, u) = \sum_{k=m}^{n} T(k, u) + T(n+1, u) \ \text{ et } \ |\sum_{k=m}^{n} T(k, u)| \leq \sum_{k=m}^{n} |T(k, u)|$$

pour tous hypernaturels m, n tels que $m \leq n$ et tout hyperréel $u > 0$. On conclut en remplaçant u par w .

Ainsi on peut considérer des sommes ayant une infinité de termes : la somme $\sum_{k=m}^{n} t_k$ compte $n - m + 1$ termes, **elle contient donc une infinité de termes si $n - m + 1$ est ig !**

9.4 Sommer une infinité d'infiniment petits ...

On sait que la somme d'un nombre fini d'ip est ip. Mais que se passe-t-il si on ajoute un nombre infini d'ip ? Comme on va le voir, une telle somme n'est pas nécessairement ip. Ainsi si nous choisissons un hypernaturel p ig, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p} &= p\cdot\frac{1}{p}=1=AP\ ,\\ \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{p}} &= p\frac{1}{\sqrt{p}}=\sqrt{p}=IG\ ,\\ \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p^2} &= p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}=IP\ .\end{aligned}$$

Quand on ajoute une infinité d'ip, tout peut donc arriver, une somme d'une infinité d'ip est donc un cas d'indétermination. De même une somme d'une infinité de limités est aussi un cas d'indétermination. Le résultat suivant permet de lever de très nombreuses indéterminations de ces types.

Théorème 21. *Considérons la somme* $\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k$.

1. *Si* $\sum_{k=0}^{m}|\lambda_k|$ *est limitée et si chaque* u_k *est infiniment petit, alors* $\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k$ *est infiniment petite.*
2. *Si* $\sum_{k=0}^{m}|\lambda_k|$ *est limitée et si chaque* u_k *est limité, alors* $\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k$ *est limitée.*
3. *Si* $\sum_{k=0}^{m}|\lambda_k|$ *est infiniment petite et si chaque* u_k *est limité, alors* $\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k$ *est infiniment petite.*

Démonstration. Le raisonnement est semblable dans les trois cas. Envisageons le premier cas : supposons $\sum_{k=0}^{m}|\lambda_k|$ limitée et u_k ip pour chaque k. On peut alors trouver un réel a tel que

$$\sum_{k=0}^{m}|\lambda_k| < a\ .$$

Pour montrer que $\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k$ est ip, appliquons la définition d'un ip. : soit r un réel quelconque > 0, prouvons $|\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k| < r$. En effet, pour chaque k on a $|u_k| < r/a$, il s'ensuit

$$|\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k| \le \sum_{k=0}^{m}|\lambda_k||u_k| \le \sum_{k=0}^{m}(|\lambda_k|\frac{r}{a}) = \frac{r}{a}(\sum_{k=0}^{m}|\lambda_k|) < \frac{r}{a}\cdot a = r \quad .$$

□

En abrégé on a :

$\sum_{k=0}^{m}\lambda_k u_k$		
	u_k IP	u_k LIM
$\sum_{k=0}^{m}\lvert\lambda_k\rvert$ LIM	**IP**	**LIM**
$\sum_{k=0}^{m}\lvert\lambda_k\rvert$ IP	IP	**IP**

Pour les ordres de grandeur ip et limité, tout se passe donc comme si on multipliait l'ordre de grandeur de $\sum_{k=0}^{m}|\lambda_k|$ *par l'ordre de grandeur de tous les* u_k .

Chapitre 10

Trois résultats importants concernant la continuité

Dans ce chapitre on voit trois résultats importants relatifs à la continuité des fonctions : le Théorème des Bornes atteintes, le Théorème des Valeurs intermédiaires. et le Théorème de Continuité uniforme.

10.1 Bornes atteintes et Valeurs intermédiaires

Le Théorème des bornes atteintes concerne les extrema des valeurs d'une fonction lorsque la variable parcourt un intervalle. Il est clair que même dans des cas simples de tels extrema peuvent ne pas exister, ainsi

— l'expression $x^2 + 1$ n'a pas de maximum lorsque $x \in]0, +\infty[$,

— l'expression $\frac{1}{x}$ n'a pas de pas de maximum lorsque $x \in]0, 1]$.

Par contre lorsque $x \in [-3, 2]$ l'expression $x^2 + 1$ a pour maximum 10 et pour minimum 1, ce maximum est réalisé en prenant $x = -3$ et ce minimum est réalisé en prenant $x = 0$. Le Théorème des Bornes atteintes nous donne une condition suffisante très simple assurant qu'une fonction admette un maximum et un minimum dans un intervalle :

Théorème 22 (Théorème des bornes atteintes ou Théorème de Weierstrass)**.**
Soient a, b des réels et $a < b$. Si f est continue dans $[a, b]$, il existe des réels c, d dans $[a, b]$ tels que pour tout $x \in [a, b]$

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) ,$$

autrement dit f atteint son minimum, respectivement son maximum, dans $[a, b]$ en c, respectivement en d.

Théorème 23 (Théorème des valeurs intermédiaires ou Théorème de Bolzano)**.**
Soient a,b des réels, $a < b$ et f une fonction continue dans $[a,\ b]$. Si M est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel u dans $[a,\ b]$ tel que $M = f(u)$.

Autrement dit :

moyennant la continuité de f dans $[a, b]$, tout nombre réel compris entre les deux valeurs $f(a)$ et $f(b)$ est lui même une valeur $f(x)$ correspondant à un x se trouvant entre a et b .

Ces deux théorèmes sont illustrés sur la figure 10.1.

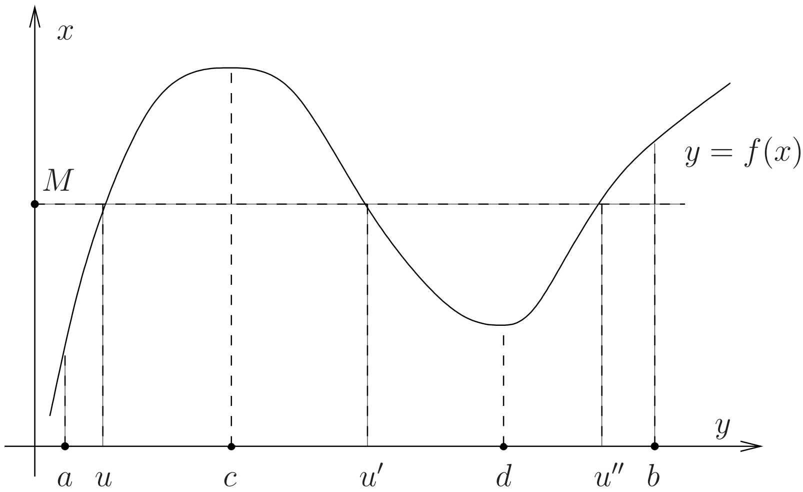


FIGURE 10.1: Extrema atteints en c, d et $M = f(x)$ en $x = u$, u', u''

Pour autant qu'on puisse tracer le graphe de f dans $[a, b]$ et en nous référant à la figure 10.1, les conclusions données par ces deux théorèmes paraissent comme évidentes :

1. on prend la plus grande et la plus petite ordonnée des points du graphe limité aux abscisses se trouvant dans $[a, b]$ et on trouve c et d en prenant les abscisses correspondantes ;
2. pour trouver le réel u tel que $M = f(u)$, on trace l'horizontale $y = M$, puisque le graphe se trace d'un seul trait, cette horizontale coupe le graphe au moins en un point, il suffit alors de prendre l'abscisse correspondant à ce point pour trouver le réel u cherché.

Ces raisonnements ne sont pas des démonstrations car ils se basent sur le fait qu'on puisse tracer le graphe de la fonction et le raisonnement repose essentiellement sur des considérations graphiques. Rappelons d'ailleurs que le tracé du graphe n'est pas toujours concrètement possible (voir l'exercice 4 page 82). De plus, le tracé de graphe contient en fait de nombreuses "hypothèses cachées". De vraies démonstrations s'imposent donc, nous ne les ferons pas ici [1].

10.2 Applications à l'existence de racines

Ici on se place bien entendu dans les réels [2].

1. on peut les trouver par exemple dans [16]
2. les conclusions seraient autres dans $\mathbb{C}$, voir par exemple [8]

Envisageons d'abord l'existence de la **racine p^e d'un nombre réel**. Soit a un réel et p un naturel ≥ 2. Considérons l'équation

$$x^p = a\ . \tag{10.1}$$

Trois cas se présentent :

— *p est pair $a < 0$*. Alors l'équation (10.1) n'a pas de solution.

— *p est pair et $a > 0$*. Alors, si l'équation (10.1) a une solution x, elle a d'office une seule autre solution à savoir $-x$, autrement dit cette équation a exactement deux solutions opposées par le signe ; par définition $\sqrt[p]{a}$ est alors la solution > 0 de (10.1).

— *p est impair*. Vu le caractère strictement croissant de x^p, l'équation (10.1) ne peut avoir qu'une seule solution qui, si elle existe est appelée $\sqrt[p]{a}$.

Dans les cas 2 et 3 ci-dessus, le problème est de savoir si on peut trouver un réel x tel que $x^p = a$ autrement dit si $\sqrt[p]{a}$ existe.

Au chapitre 1, on a prouvé géométriquement que tout nombre positif avait une racine carrée. Le Théorème des valeurs intermédiaires permet facilement d'étendre cela et de prouver l'existence de la racine p^e.

Prenons un réel $a > 0$. Deux cas se présentent :

— si $a > 1$, alors $1^p < a < a^p$,

— si $0 < a < 1$, alors $0^p < a < 1^p$.

De toute façon il existe des réels positifs u, v tels que $u < v$ et $u^p < a < v^p$. Puisque x^p est continu dans $\mathbb{R}$ et a fortiori dans $[u, v]$, il doit exister un réel positif w tel que $w^p = a$. Ainsi $\sqrt[p]{a}$ est bien définie.

Si $a < 0$ et si p est impair, le nombre $-\sqrt[p]{-a}$ est solution de $x^p = a$ et donc $\sqrt[p]{a}$ existe aussi. *Attention*, si p est impair et $a < 0$, la notation $\sqrt[p]{a}$ ne représente pas le même nombre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ (voir [8]), *l'utilisation de racines d'ordre impair de nombres négatifs est toujours délicate !*

Rappelons que les **puissances à exposants rationnels** non entiers sont définies au départ des racines et peuvent donc nécessiter des conditions pour exister, quatre cas se présentent illustrés par les exemples suivants :

— la puissance $a^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{a})^3$ est définie lorsque $a \geq 0$,

— la puissance $a^{-\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{a})^{-3}$ est définie lorsque $a > 0$,

— la puissance $a^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{a})^4$ est définie pour tout a,

— la puissance $a^{-\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{a})^4$ est définie pour tout $a \neq 0$.

Intéressons-nous aux **polynômes à coefficients réels et à leurs racines réelles** éventuelles.

Rappelons qu'un nombre x_0 est racine d'un polynôme $P(x)$ lorsque $P(x_0) = 0$. On sait qu'un polynôme de degré pair peut ne pas avoir de racine réelle, par exemple $x^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Considérons un polynôme $P(x)$ de degré impair et à coefficients réels. Alors les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont infinies et de signe opposés, dès lors on peut trouver un réel u et un réel v tels que $P(u) < 0 < P(v)$; or $P(x)$ est continu dans $\mathbb{R}$, on peut donc trouver entre u et v un réel w tel que $P(w) = 0$. On a ainsi prouvé :

Théorème 24. *Tout polynôme de degré impair à coefficients réels a une racine réelle.* [3]

10.3 Extension du Principe de transfert

Les deux théorèmes ci-dessus s'étendent naturellement aux hyperréels, pour ce faire nous allons évidemment appliquer le Principe de transfert. Raisonnons dans le cas du Théorème des valeurs intermédiaires, ce sera aussi l'occasion de mettre en évidence une extension très utile du Principe de transfert.

Supposons que la fonction réelle f soit continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient u, v dans I tels que $u < v$, envisageons le cas $f(u) < y < f(v)$ où y est réel, alors d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel w entre u et v tel que $y = f(w)$. Ainsi, dans les réels le système

$$S_1(u, v, y) \equiv \begin{cases} u, v \in I \\ f(u) < y < f(v) \end{cases}$$

entraîne qu'il existe un réel w vérifiant

$$S_2(u, v, y, w) \equiv \begin{cases} u < w < v \\ y = f(w) \end{cases}$$

Chaque fois que $S_1(u, v, y)$ est vérifié, prenons un réel w vérifiant $S_2(u, v, y, w)$, considérons la fonction h qui à tous u, v, y réels vérifiant $S_1(u, v, y)$, associe ce réel w, autrement dit

$$u, v, y \text{ tel que } S_1(u, v, y) \longmapsto h(u, v, y) := w \text{ tel que } S_2(u, v, y, w)\,.$$

Ainsi dans $\mathbb{R}$ le système standard $S_1(u, v, y)$ entraîne le système standard

$$S_2(u, v, y, h(u, v, y))\,. \tag{10.2}$$

Appliquons maintenant le Principe de transfert : la fonction h admet une extension standard et dans ${}^*\mathbb{R}$ le système standard $S_1(u, v, y)$ entraîne encore le système standard (10.2). Par conséquent, pour tous u, v dans ${}^*I$ et tout y tels que $u < v$ et $f(u) < y < f(v)$, en prenant $w = h(u, v, y)$ on obtient un nombre w entre u et v tel que $y = f(w)$.

On peut raisonner de façon similaire pour le Théorème des bornes atteintes, en conclusion :

Bornes atteintes et Valeurs intermédiaires étendus à ${}^*\mathbb{R}$.
Soient f continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et u, v dans ${}^*I$ tels que $u < v$.

1. *Pour tout hyperréel y compris entre $f(u)$ et $f(v)$, il existe w entre u et v tel que $y = f(w)$.*

3. on peut donner une preuve purement algébrique de ce résultat, voir par exemple [8].

2. Il existe w', w'' dans ${}^*[u,v]$ tels que $f(w') \leq f(x) \leq f(w'')$ pour tout x dans ${}^*[u,v]$.

La démonstration ci-dessus est l'occasion de dégager une extension importante du Principe de transfert. Revenons à la preuve ci-dessus. On est en présence d'un système standard $S_1(u,v,y)$ qui dans les réels entraîne qu'il existe un réel w tel qu'un second système standard $S_2(u,v,y,w)$ soit vérifié. Nous avons vu qu'alors pour u,v,y hyperréels le système $S_1(u,v,y)$ entraînait aussi qu'il existe un hyperréel w tel que $S_2(u,v,y,w)$ soit vérifié. On peut refaire exactement le même raisonnement pour tous autres systèmes standard $S_1(x_1,\dots,x_n)$ et $S_2(x_1,\dots,x_n,y)$. On obtient ainsi l'extension suivante du Principe de transfert :

Extension du Principe de transfert
Si dans les réels chaque fois qu'un système standard $S_1(x_1,\dots,x_n)$ est vérifié, il existe un réel y vérifiant le système standard $S_2(x_1,\dots,x_n,y)$, alors chaque fois que $S_1(x_1,\dots,x_n)$ est vérifié dans ${}^*\mathbb{R}$, il existe un hyperréel y vérifiant $S_2(x_1,\dots,x_n,y)$.

10.4 Continuité uniforme

Considérons une fonction f continue dans un intervalle I. Si u et v sont ${}^*I$, peut-on dire que $u \approx v$ entraîne $f(u) \approx f(v)$? En se rappelant la définition de la continuité, on est tenté de répondre immédiatement *oui*, et pourtant cela n'est pas toujours vrai et on peut avoir de mauvaises surprises !

Ainsi $\frac{1}{x}$ est continu dans $]0,+\infty[$ et si ε est un infiniment petit > 0, on a bien $\varepsilon \approx 2\varepsilon$ alors que

$$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} = \text{ IG}$$

et donc $\frac{1}{\varepsilon} \not\approx \frac{1}{2\varepsilon}$.

Toutefois si on se place dans un intervalle I de la forme $[a,b]$, on n'a plus de mauvaise surprise :

Théorème 25 (Continuité uniforme)**.**
Si $f(x)$ est continu dans $[a,b]$, alors
— *$f(u)$ est limité pour tout u dans ${}^*[a,b]$,*
— *si u, v sont dans ${}^*[a,b]$ et si $u \approx v$, on a $f(u) \approx f(v)$.*

Démonstration. Soit f continue dans $[a,b]$. Si $a \leq u$, $v \leq b$ et si $u \approx v$, en prenant $r = \text{st}(u) = \text{st}(v)$, on a

$$r \in [a,b] \quad , \quad u \in {}^*[a,b] \quad , \quad r \approx u$$

et donc $f(r) \approx f(u)$, la valeur $f(u)$ est donc limitée. De la même façon on a $f(r) \approx f(v)$; par conséquent $f(u) \approx f(v)$. □

Chapitre 11

Intégrales

Ici a, b sont des réels tels que $a < b$ et Δx prend toujours des valeurs > 0.

11.1 Discrétisation de $[a, b]$ de pas Δx

Pas réel

Envisageons d'abord le cas où le pas Δx est un réel > 0.

Considérons un réel $\Delta x > 0$. Nous allons partager l'intervalle $[a, b]$ en intervalles de longueur Δx, le dernier intervalle ainsi obtenu ayant une longueur $\leq \Delta x$, les extrémités de ces intervalles seront notées x_i. Soit p le naturel tel que

$$\boxed{p \cdot \Delta x < b - a \leq (p + 1) \cdot \Delta x\,.} \tag{11.1}$$

Cet entier p dépend de Δx, c'est le nombre de fois que la longueur Δx est portée au départ de a avant d'atteindre ou de dépasser b. On pose

$$\boxed{x_k := a + k \cdot \Delta x \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, p \text{ et } x_{p+1} = b\,.} \tag{11.2}$$

On obtient ainsi une collection finie $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p+1}$, appelée la **discrétisation de $[a, b]$ de pas Δx** ; le nombre de points de cet échantillon est $p + 2$. Cela est illustré sur la figure 11.1, dans ce cas $p = 6$.

Passage à un pas infiniment petit

On peut refaire la même construction pour tout pas hyperréel $\Delta x > 0$, en particulier pour tout pas infiniment petit > 0. Si le pas Δx est ip, une question se pose : va-t-on de la sorte atteindre b ? En fait on va devoir alors porter une infinité de fois le pas Δx. En effet on sait que le nombre infiniment grand $\frac{b-a}{\Delta x}$ est coincé entre deux hypernaturels successifs, forcément infiniment grands, il existe donc un hypernaturel infiniment grand p tel que

$$p < \frac{b - a}{\Delta x} \leq p + 1$$

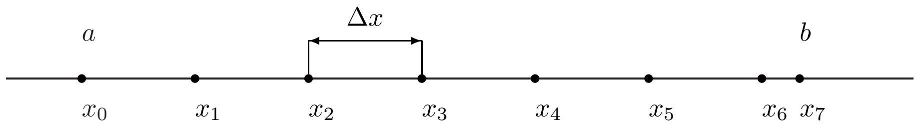


FIGURE 11.1: discrétisation de pas Δx dans un cas où $p = 6$

et donc tel que (11.1) soit encore vérifiée. Ainsi si, au départ de a, on porte p fois Δx on reste en dessous de b et si on porte Δx une fois de plus on atteint ou on dépasse b. Dès lors on définit les points de la discrétisation de pas Δx exactement comme plus haut au moyen de (11.2), mais bien entendu *si Δx est infiniment petit les points $x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ sont en nombre infini, et deux points successifs de la discrétisation sont alors infiniment proches.*

Le plus souvent la longueur du dernier intervalle allant de x_p à x_{p+1} est $< \Delta x$. Toutefois, si on se donne un hypernaturel m et si on prend $\Delta x = \frac{b-a}{m}$, le dernier intervalle rencontré a également la longueur Δx.

11.2 L'idée initiale : l'estimation d'une aire par des rectangles

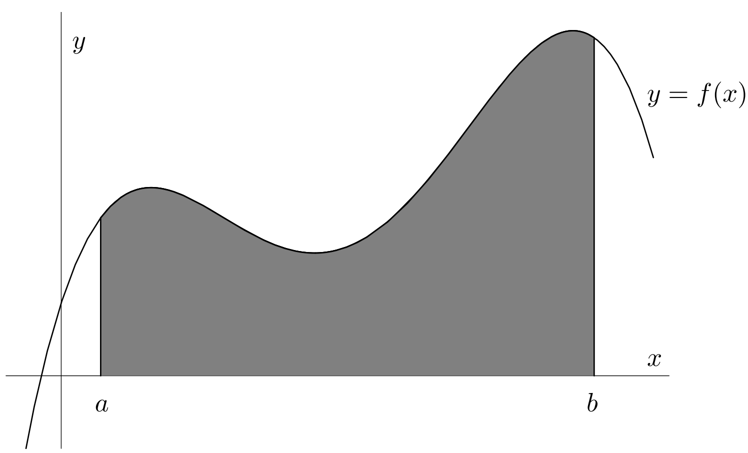


FIGURE 11.2: l'ensemble $\mathcal{D}$

Soit f une fonction réelle d'une variable définie dans $[a, b]$. Supposons $f(x) \geq 0$ dans $[a, b]$. Désignons par $\mathcal{D}$ la partie du plan délimitée par les droites d'équation

$x = a$, $x = b$, l'axe des x et le graphe de la fonction f. Dans l'exemple de la figure 11.2, $\mathcal{D}$ est donc la partie hachurée.

En introduisant l'intégrale de f dans $[a, b]$, l'idée est de mesurer l'aire de $\mathcal{D}$:

> *l'intégrale devrait représenter cette aire.*

On peut approcher cette aire au moyen de rectangles : on choisit un pas réel $\Delta x > 0$, au moyen de ce pas on discrétise l'intervalle $[a, b]$ et on obtient ainsi les points $x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}$, alors une première évaluation de l'aire de $\mathcal{D}$ nous est donnée par la somme des aires des $p+1$ rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$. Ainsi on évalue l'aire de $\mathcal{D}$ par la somme

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(x_k) \cdot \Delta x + f(x_p) \cdot (b - x_p) \tag{11.3}$$

Cela est illustré sur la figure (11.3) : l'union des $p+1$ rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$ est la partie grisée.

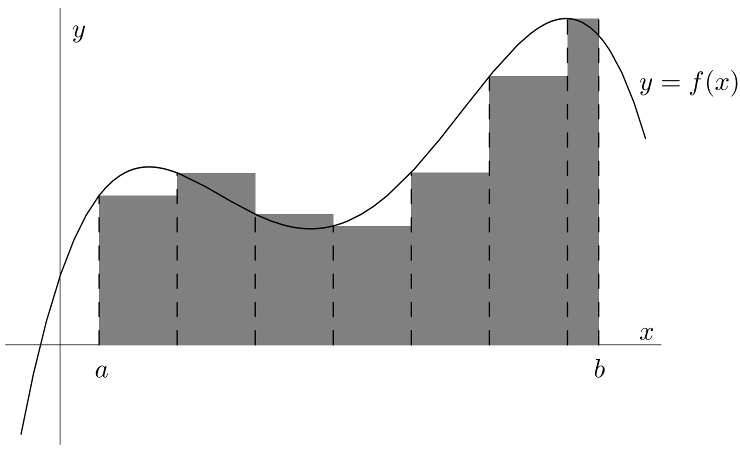


FIGURE 11.3: approche de l'ensemble $\mathcal{D}$ par une union de rectangles

Il est évident que cette évaluation de l'aire de $\mathcal{D}$ est d'autant meilleure que le pas réel Δx est petit, il semble aussi clair que les fluctuations des aires ainsi obtenues sont d'autant plus petites que le pas est choisi petit. Dès lors afin d'améliorer au mieux ces évaluations, de diminuer au mieux leurs fluctuations, une idée s'impose :

> *il faudrait prendre un pas Δx infiniment petit et pouvoir considérer la somme (11.3) associée à ce pas, nous aurions alors une excellente évaluation de l'aire cherchée.*

C'est ce qu'on va faire : *l'intégrale devrait être cette somme lorsque le pas est infiniment petit.* Telle est l'idée de base de l'intégrale, nous devrons seulement y apporter un "correctif infiniment petit".

11.3 Sommes de Riemann

Soit f une fonction réelle d'une variable définie dans $[a, b]$. Ici $f(x)$ n'est pas nécessairement ≥ 0 dans $[a, b]$.

Envisageons d'abord le cas d'un pas réel $\Delta x > 0$. Discrétisons $[a, b]$ au moyen du pas Δx, on obtient ainsi les point $x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}$. Comme plus haut considérons

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(x_k) \cdot \Delta x + f(x_p) \cdot (b - x_p) \tag{11.4}$$

autrement dit

$$\sum_{k=0}^{p} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \ ,$$

cette somme est appelée une **somme de Riemann** , elle est notée $S(\Delta x)$ et elle dépend de Δx mais bien entendu aussi de la fonction f et de a, b.

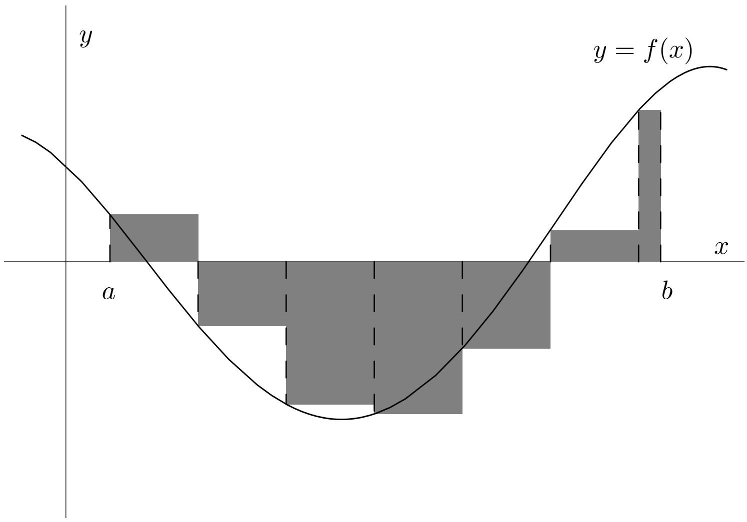


FIGURE 11.4: Interprétation géométrique de $S(\Delta x)$

Comme on le voit sur la figure 11.4, $S(\Delta x)$ *est la somme des aires des rectangles situés au-dessus de l'axe des abscisses moins la somme des aires des rectangles situés en dessous de cet axe.*

Ce qu'on vient de faire pour un pas réel Δx on peut le faire pour un pas hyperréel > 0, en particulier pour un pas infiniment petit. Les points de la discrétisation sont définis de la même façon. Il est vrai que, si Δx est infiniment petit, la discrétisation est composée d'une infinité de x_k, mais cela ne nous empêche pas de considérer la somme (11.4), en effet en posant $x_k = b$ pour $k > p + 1$ on prolonge les x_k

pour tout indice k hypernaturel et on est alors dans les conditions pour pouvoir considérer la somme $\sum_{k=m}^{n} f(x_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$ pour tous hypernaturels m, n tels que $m \leq n$. En particulier -et c'est cela qui nous intéresse- on peut considérer la somme $\sum_{k=0}^{p} f(x_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$. Bien entendu si Δx est infiniment petit cette somme de Riemann contient une infinité de termes.

Dans la somme de Riemann $S(\Delta x)$ considérée ci-dessus on a chaque fois pris la valeur de la fonction à l'extrémité gauche des intervalles obtenus en partageant $[a, b]$. On aurait pu procéder autrement et, pour chaque k, choisir un autre point entre x_k et x_{k+1} , on aurait pu prendre l'extrémité droite x_{k+1} ou encore le milieu .... En fait pour choisir un point entre x_k et x_{k+1} il nous faut une règle qui entre deux nombres quelconques choisit un nombre, une telle règle est appelée une *fonction de choix*, plus précisément :

φ est une ***fonction de choix*** *définie dans $[a, b]$ lorsque φ est une fonction réelle de deux variables qui à tous u, v dans $[a, b]$ tels que $u < v$ associe un nombre $\varphi(u, v)$ tel que $u \leq \varphi(u, v) \leq v$. Alors, en prenant l'extension de φ aux hyperréels, φ choisit un nombre $\varphi(u, v)$ entre u et v pour tous hyperréels u v tels que $a \leq u < v \leq b$.*

Plus haut en choisissant chaque fois l'extrémité gauche de l'intervalle considéré, on a en fait utilisé la fonction de choix *ExtrGauche* définie par

$$\mathit{ExtrGauche} \ : \ (u, v) \longmapsto u \ .$$

Voici quelques autres exemples de fonctions de choix :

$$\begin{aligned} \mathit{ExtrDroite} \ : \ (u, v) \quad &\longmapsto \quad v \ , \\ \mathit{Milieu} \ : \ (u, v) \quad &\longmapsto \quad \frac{u+v}{2} \ , \\ \mathit{Pond}_{21} \ : \ (u, v) \quad &\longmapsto \quad \frac{2u+v}{3} \ . \end{aligned}$$

Etant donné une fonction de choix φ, pour chaque hyperréel $\Delta x > 0$, notons x'_k le point choisi entre x_k et x_{k+1}, c'est-à-dire $x'_k := \varphi(x_k, x_{k+1})$. On considère la somme obtenue comme plus haut mais en prenant cette fois la valeur de la fonction f en chaque x'_k, ainsi on considère la somme

$$\boxed{S_\varphi(\Delta x) := \sum_{k=0}^{p-1} f(x'_k)\cdot\Delta x + f(x'_p)\cdot(b - x_p)} \tag{11.5}$$

ou encore

$$\boxed{S_\varphi(\Delta x) = \sum_{k=0}^{p} f(x'_k)\cdot(x_{k+1} - x_k)} \ . \tag{11.6}$$

Cette somme est appelée la **somme de Riemann** associée au pas Δx et à la fonction de choix φ, elle sera notée $S_\varphi(\Delta x)$.

11.4 Définition de l'intégrale de Riemann

Considérons encore une fonction définie f dans $[a, b]$. Rappelons l'idée à la base de l'intégrale :

> *l'intégrale de f dans $[a, b]$ devrait être une somme de Riemann associée à un pas infiniment petit.*

Mais tel quel cela poserait deux problèmes :
- l'intégrale ne serait pas un nombre réel,
- les sommes de Riemann fluctueraient sans doute encore et l'intégrale dépendrait du pas et de la fonction de choix considérés.

En fait on va pouvoir montrer que, moyennant la continuité de f, les sommes de Riemann fluctuent encore lorsqu'on prend un pas ip mais que ces fluctuations sont infiniment petites ! Dès lors si on veut gommer ces fluctuations il suffirait de prendre la partie standard des sommes de Riemann ... pour autant que les sommes de Riemann soient limitées. Ces considérations nous amènent à la définition suivante :

Définition (Intégrale de Riemann)**.**
Soit $f(x)$ définie dans $[a, b]$. L'intégrale de f dans $[a, b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$, existe[1] *lorsque pour Δx infiniment petit > 0 et pour toute fonction de choix φ les sommes de Riemann $S_\varphi(\Delta x)$ sont limitées et ont la même partie standard, alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \mathrm{st}(S_\varphi(\Delta x)) \; .}$$

De telles fonctions existent-elles ? Oui, car nous allons voir que les conditions ci-dessus sont vérifiées dès que la fonction est continue dans $[a, b]$ (ce qui est n'est pas bien exigeant).

De par les conditions de la définition, l'intégrale de f dans $[a, b]$ est donc un **nombre réel qui dépend uniquement de la fonction f et des bornes d'intégration a, b**. Dans la notation $\int_a^b f(x)dx$ la variable x et l'expression dx sont donc des symboles muets, ils nous rappellent la construction des sommes de Riemann et comme on s'en rendra compte plus tard lors du calcul des intégrales ils sont tout compte fait bien pratiques.

Complétons la définition ci-dessus en convenant :

$$\int_b^a f(x)dx \; := \; -\int_a^b f(x)dx \quad et \quad \int_a^a f(x)dx \; := \; 0 \; .$$

11.5 Existence de l'intégrale

Commençons par prouver que les sommes de Riemann sont limitées.

Théorème 26 (Encadrement des sommes de Riemann)**.**
Soient f continue dans $[a, b]$ et φ une fonction de choix. Considérons c, d réels de

1. on dit aussi que f est intégrable (au sens de Riemann) dans $[a, b]$ et cette intégrale s'appelle une intégrale de Riemann

$[a,b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ pour tout x dans $[a,b]$ (de tels réels existent vu le Théorème des Bornes atteintes). Alors pour tout pas $\Delta x > 0$ on a

$$\boxed{(b-a) \cdot f(c) \leq S_\varphi(\Delta x) \leq (b-a) \cdot f(d) \;.} \tag{11.7}$$

et $S_\varphi(\Delta x)$ est limitée.

Démonstration. Soient c et d vérifiant les conditions du théorème. D'après le Principe de transfert, pour tout x dans ${}^*[a,b]$ on a $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. Considérons un pas $\Delta x > 0$. Soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ la discrétisation de $[a,b]$ de pas Δx et notons x'_k le point choisi entre x_k et x_{k+1}. Par conséquent pour chaque k on a $a \leq x'_k \leq b$ et donc $f(c) \leq f(x'_k) \leq f(d)$, d'où

$$f(c) \cdot (x_{k+1} - x_k) \leq f(x'_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \leq f(d) \cdot (x_{k+1} - x_k) \;.$$

En additionnant ces termes on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} f(c) \cdot (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{p} f(x'_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{p} f(d) \cdot (x_{k+1} - x_k) \;,$$

c'est-à-dire

$$f(c) \cdot \sum_{k=0}^{p} (x_{k+1} - x_k) \leq S_\varphi(\Delta x) \leq f(d) \cdot \sum_{k=0}^{p} (x_{k+1} - x_k)$$

et, puisque $\sum_{k=0}^{p} (x_{k+1} - x_k) = b - a$, la double inégalité (11.7) est vérifiée.

$S_\varphi(\Delta x)$ est limitée car, vu (11.7), elle est comprises entre deux réels. □

Notre but est de prouver que les sommes de Riemann associées à des pas ip ont la même partie standard, autrement dit sont infiniment proches. Nous pouvons changer de discrétisation, nous pouvons aussi changer de fonction de choix. Commençons par modifier la fonction de choix sur une même discrétisation de pas ip.

Théorème 27 (Indépendance du choix)**.**
Soient f continue dans $[a,b]$, Δx ip > 0 et φ, ψ deux fonctions de choix. Alors

$$S_\varphi(\Delta x) \approx S_\psi(\Delta x) \;.$$

La fonction de choix n'a donc pas d'influence sur la partie standard des sommes de Riemann de même pas ip.

Démonstration. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ la discrétisation de pas Δx, notons x'_k, x''_k le point choisi entre x_k et x_{k+1} respectivement par φ et ψ. Les nombres x'_k et x''_k sont donc infiniment proches de x_k et donc infiniment proches entre eux. Vu le Théorème de Continuité uniforme, pour chaque k on a

$$f(x'_k) \approx f(x''_k) \;.$$

et $f(x'_k) - f(x''_k)$ est un ip ε_k. Nous avons

$$S_\varphi(\mathcal{D}) - S_\psi(\mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{p} (x_{k+1} - x_k)(f(x'_k) - f(x''_k)) = \sum_{k=0}^{p} (x_{k+1} - x_k)\varepsilon_k \;.$$

Dès lors, du théorème 21 et puisque $\sum_{k=0}^{p} |x_{k+1} - x_k| = b - a$, on a que la différence des deux sommes de Riemann est ip. □

Nous n'avons plus à nous soucier de la fonction de choix, par exemple choisissons $x'_k = x_k$. Faisons varier le pas ip.

Théorème 28 (Découpage)**.**
Soit f continue dans $[a, b]$. Si Δx et $\Delta x'$ sont des pas ip > 0, alors $S(\Delta x) \approx S(\Delta x')$.

Démonstration. Soient $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p+1}$ la discrétisation de pas Δx et $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{q+1}$ la discrétisation de pas $\Delta x'$. Nous avons

$$S(\Delta x) = \sum_{i=0}^{p} f(u_i) \cdot (u_{i+1} - u_i) \quad \text{et} \quad S(\Delta x') = \sum_{j=0}^{q} f(v_j) \cdot (v_{j+1} - v_j) \, . \tag{11.8}$$

1. Considérons simultanément tous les u_i et v_j et rangeons les par ordre croissant ; notons w_k avec $k = 0, 1, \ldots, l + 1$ tous les nombres ainsi obtenus (voir figure 11.5), bien entendu si u_i et v_j coïncident, on les prend une seule fois en considération.

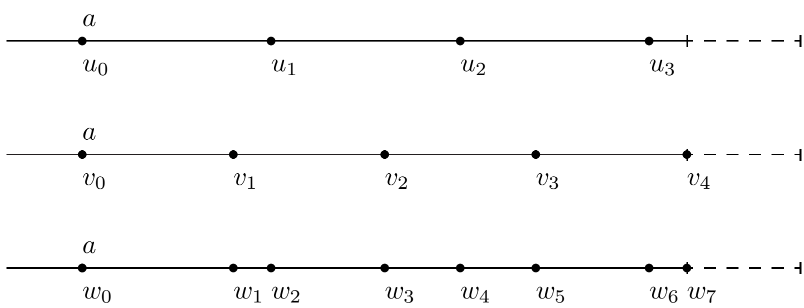


FIGURE 11.5: les nombres u_k , v_k et w_k

2. Chaque intervalle allant de u_i à u_{i+1} se découpe en intervalles successifs d'extrémités w_k , chaque terme de la somme $S(\Delta x)$ se décompose ainsi en termes de la forme $(w_{k+1} - w_k)f(\ldots)$. Déterminons $f(\ldots)$: l'intervalle allant de w_k à w_{k+1} provient du découpage d'un certain intervalle allant de u_m à u_{m+1}, alors le terme $(u_{m+1} - u_m)f(u_m)$ s'est partagé en plusieurs termes dont l'un est $(w_{k+1} - w_k)f(u_m)$, alors à la place de $f(\ldots)$ il faut prendre $f(u_m)$. Le nombre u_m dépend de k , notons $c_k := u_m$. Remarquons que w_k se trouve entre u_m et u_{m+1} et donc

$$w_k \approx c_k \, . \tag{11.9}$$

Ainsi la somme $S(\Delta x)$ s'écrit :

$$S(\Delta x) = \sum_{k=0}^{l} (w_{k+1} - w_k) f(c_k) \, .$$

On peut faire de même avec la seconde somme de Riemann : chaque terme de la somme $S(\Delta x')$ se décompose en termes de la forme $(w_{k+1} - w_k)f(d_k)$ où d_k est obtenu comme suit : l'intervalle allant de w_k à w_{k+1} provient du découpage d'un certain intervalle allant de u_n à u_{n+1}, alors notons $d_k := u_n$. Il s'ensuit

$$w_k \approx d_k \; . \tag{11.10}$$

Ainsi la somme $S(\Delta x')$ s'écrit :

$$S(\Delta x') = \sum_{k=0}^{l} (w_{k+1} - w_k) f(d_k) \; .$$

3. Ainsi écrites les deux sommes de Riemann ont le même nombre de termes et les termes correspondants ont un facteur commun, on peut maintenant faire la différence de ces deux sommes, on obtient :

$$S(\Delta x) - S(\Delta x') = \sum_{k=0}^{l} (w_{k+1} - w_k)(f(c_k) - f(d_k)) \; .$$

Vu (11.9) et (11.10), on a $c_k \approx d_k$ et donc, vu le Théorème de continuité uniforme,

$$f(c_k) \approx f(d_k) \; ,$$

ainsi $f(c_k) - f(d_k)$ est ip. De nouveau grâce au théorème 21 et au fait que

$$\sum_{k=0}^{l} (w_{k+1} - w_k) = b - a \; ,$$

on a que la différence des deux sommes de Riemann est ip.

□

Au vu des trois théorèmes précédents, si f est continue dans $[a, b]$, pour toute discrétisation de pas ip > 0 et toute fonction de choix, la somme de Riemann est limitée et deux sommes de Riemann correspondant à des pas ip et à des fonctions de choix éventuellement différentes sont infiniment proches et ont donc la même partie standard. Par conséquent :

Théorème 29 (Existence de l'intégrale)**.**
Si f est continu dans $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe.

11.6 Calcul de l'aire

En plus de la continuité de $f(x)$ dans $[a, b]$, supposons $f(x) \geq 0$ et cherchons l'aire de l'ensemble $\mathcal{D}$ (voir figure 11.2) définie à la page 143.

Considérons deux nouvelles fonctions de choix Max et Min : si $a \leq u < v \leq b$, $Min(u, v)$ est le nombre w compris entre u et v tel que $f(w)$ est le minimum de $f(x)$ pour $u \leq x \leq v$, de même $Max(u, v)$ est le nombre w' compris entre u et v tel que $f(w')$ est le maximum de $f(x)$ pour $u \leq x \leq v$. Ainsi pour tout x entre u et v on a $f(w) \leq f(x) \leq f(w')$. Considérons un pas Δx ip > 0. Les rectangles déterminés par la fonction de choix Min sont en dessous du graphe, tandis que les rectangles déterminés par la fonction de choix Max ont leur côté supérieur au dessus du graphe. Dès lors on a

$$S_{Min}(\mathcal{D}) \leq \text{ Aire de } A \leq S_{Max}(\mathcal{D}) \ . \tag{11.11}$$

Mais

$$S_{Min}(\Delta x) \approx S_{Max}(\Delta x) \approx \int_a^b f(x)dx \ .$$

L'aire de $\mathcal{D}$ est donc infiniment proche de $\int_a^b f(x)dx$, mais cette aire doit être un réel, par conséquent

$$\boxed{\text{Aire de } \mathcal{D} = \int_a^b f(x)dx \ .} \tag{11.12}$$

11.7 Propriétés des intégrales

Comme on va le voir, les propriétés des intégrales sont une adaptation des propriétés des sommes.

Théorème 30 (Propriétés classiques)**.**
Soient f, g des fonctions continues dans $[a,b]$ et λ une constante réelle.

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dxMthodedeSimpson$ *et* $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.
2. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
3. *Si* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

   Si $f(x) \geq g(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
4. *Si f est continu dans $[a,c]$ et si $a \leq b \leq c$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \ . \tag{11.13}$$

Démonstration. 1. Les propriétés 1 et 2 se prouvent de la même façon, prouvons la seconde. Soit Δx un pas ip > 0 et $x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}$ la discrétisation de pas Δx . On sait

$$|\sum_{k=0}^{p} f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)| \leq \sum_{k=0}^{p} |f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)| = \sum_{k=0}^{p} |f(x_k)| \cdot (x_{k+1} - x_k) \ .$$

Puisque $|\operatorname{st}(w)| = \operatorname{st}(|w|)$, on a

$$\begin{aligned} |\operatorname{st}(\sum_{k=0}^{p} f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k))| &= \operatorname{st}(|\sum_{k=0}^{p} f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)|) \\ &\leq \operatorname{st}(\sum_{k=0}^{p} |f(x_k)| \cdot (x_{k+1} - x_k)) \end{aligned} \tag{11.14}$$

et donc

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

2. Si $f(x) \geq 0$ dans $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx \geq |\int_a^b f(x)dx| \geq 0$$

d'où la première partie du résultat 3.

Si $f(x) \geq g(x)$, on a

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

d'où la seconde partie de 3.

3. Prouvons (11.13). L'idée est simple : en prenant un Δx ip > 0, on aimerait pouvoir dire que la somme de Riemann dans $[a, b]$ plus la somme de Riemann dans $[b, c]$ nous donne la somme de Riemann dans $[a, c]$; mais cela en général est faux. En effet le dernier intervalle obtenu en partageant $[a, b]$ le plus souvent n'a pas la longueur Δx et il se produit donc un décalage entre les abscisses prises dans $[b, c]$ suivant qu'on les choisit pour la somme de Riemann dans $[a, c]$ ou la somme de Riemann dans $[b, c]$. Si on veut éviter ce décalage il faut que le dernier intervalle obtenu dans $[a, b]$ ait exactement la longueur Δx. Pour cela choisissons judicieusement Δx, plus précisément choisissons un hypernaturel m ig et posons $\Delta x = \frac{b-a}{m}$. Notons $x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ les points de la discrétisation de $[a, c]$ de pas Δx, forcément $p > m$. De la sorte $x_m = b$ et $x_0, x_1, \ldots, x_m$ sont les points de la discrétisation de $[a, b]$ de pas Δx, tandis que $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{p+1}$ sont les points de la discrétisation de $[b, c]$ de pas Δx. Nous avons

$$\sum_{k=0}^{p} f(x'_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x'_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=m}^{p} f(x'_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

Autrement dit, si on pose $S^{[a,b]}(\Delta x)$ (resp. $S^{[b,c]}(\Delta x)$, $S^{[a,c]}(\Delta x)$), la somme de Riemann de f considérée dans $[a, b]$ (resp. $[b, c]$, $[a, c]$), on a

$$S^{[a,b]}(\frac{b-a}{m}) + S^{[b,c]}(\frac{b-a}{m}) = S^{[a,c]}(\frac{b-a}{m}) \ .$$

En prenant la partie standard dans l'égalité ci-dessus, on obtient (11.13). □

Théorème 31 (Théorème de la moyenne)**.** *Si f est continue dans $[a, b]$, il existe un réel u dans $[a, b]$ tel que*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(u) \ .}$$

Démonstration. Appliquons le Théorème des bornes atteintes : prenons c et d réels dans $[a,b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ pour tout $x \in [a,b]$. Prenons Δx ip > 0, vu le Théorème d'encadrement, on a

$$(b-a) \cdot f(c) \leq S_\varphi(\Delta x) \leq (b-a) \cdot f(d) \,. \tag{11.15}$$

En prenant les parties standard dans (11.15) on obtient

$$(b-a) \cdot f(c) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \cdot f(d)$$

c'est-à-dire

$$f(c) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(d) \,.$$

En utilisant le Théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[c,d]$ ou $[d,c]$, on obtient un réel u dans $[c,d]$ ou $[d,c]$ tel que

$$f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \,.$$

□

L'interprétation géométrique est simple : si on suppose $f(x) \geq 0$ dans $[a,b]$, en nous référant à la partie du plan $\mathcal{D}$ illustrée sur la figure 11.2, on voit qu'il existe un u dans $[a,b]$ tel que l'aire de $\mathcal{D}$ soit égale à l'aire du rectangle de base $b-a$ et de hauteur $f(u)$.

Remarque. On vérifie aisément :

Les propositions 1 et 4 du théorème 30 ainsi que le Théorème de la moyenne sont encore vérifiés lorsque les bornes d'intégration ne sont pas placées dans le bon ordre. Par contre les propositions 2 et 3 du théorème 30 (qui s'expriment par des inégalités) exigent que les bornes d'intégration soient placées dans le bon ordre.

Revenons au calcul des aires en envisageant une situation plus générale que celle envisagée précédemment. Supposons

f et g continus dans $[a,b]$ et $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Désignons par $\mathcal{K}$ la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, le graphe de f et le graphe de g (voir figure 11.6). Cherchons à mesurer l'aire de $\mathcal{K}$. Les aires devraient être invariantes par translation, on peut donc, si nécessaire, appliquer à $\mathcal{K}$ une translation suivant la direction de l'axe des ordonnées de telle sorte que $\mathcal{K}$ soit entièrement compris dans le premier quadrant, soit $l\,\vec{e}_2$ le vecteur correspondant à cette translation. L'aire de $\mathcal{K}$ devrait valoir

$$\int_a^b (f(x)+l)dx - \int_a^b (g(x)+l)dx$$

c'est-à-dire $\int_a^b (f(x)-g(x))dx$. Dès lors :

$$\boxed{\text{Aire de } \mathcal{K} \ = \int_a^b (f(x)-g(x))dx} \,.$$

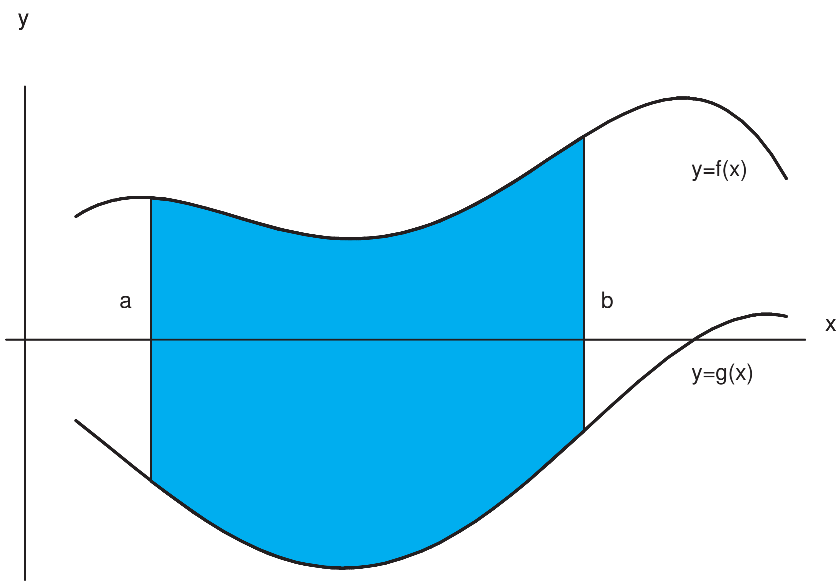


FIGURE 11.6: l'ensemble $\mathcal{K}$

11.8 Application au logarithme

Par définition le **logarithme népérien** ou **logarithme (naturel)** d'un réel $u > 0$, noté $\ln u$ (la notation anglo-saxonne étant $\operatorname{Log} u$), est défini par :

$$\boxed{\ln u := \int_1^u \frac{1}{t} dt}\,.$$

Cette intégrale existe bien puisque $\frac{1}{t}$ est continu $]0, +\infty[$, donc continu dans $[1, u]$ ou $[u, 1]$.
L'interprétation graphique de $\ln u$ est très simple :

— si $u > 1$, le nombre $\ln u$ est l'aire de la surface comprise entre l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{t}$, l'axe des t et les verticales $t = 1$ et $t = u$ (voir figure 11.7),
— si $0 < u < 1$, le nombre $\ln u$ est égale à l'opposé de cette aire.

La fonction logarithme népérien est donc la fonction

$$x \in]0, +\infty[\longmapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt\,.$$

De cette définition il découle immédiatement que $\ln x$ est strictement croissant.

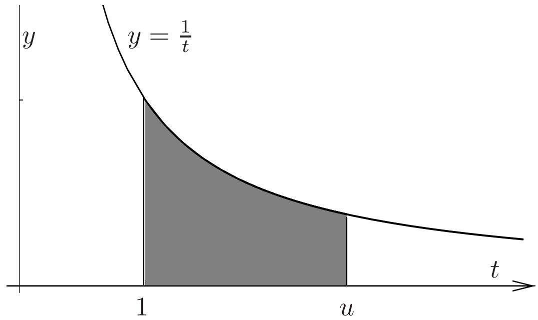


FIGURE 11.7: Interprétation graphique de $\ln(u)$.

11.9 Intégrales avec des bornes d'intégration hyperréelles

Supposons $f(x)$ continu dans un intervalle J de $\mathbb{R}$. Alors pour tous réels u, v, l'intégrale $\int_u^v f(x)dx$ existe, cette intégrale définit une fonction réelle $\mathcal{I}(u,v)$ de deux variables, il suffit de poser

$$\mathcal{I}(u,v) := \int_u^v f(x)dx$$

pour chaque u,v dans J. Comme toute fonction réelle, cette fonction s'étend en une fonction hyperréelle, puisque initialement $\mathcal{I}(u,v)$ est défini pour tous u,v dans l'intervalle J, son extension hyperréelle est définie pour tous u, v hyperréels se trouvant dans ${}^*J$. Ainsi au moyen de cette extension hyperréelle **on peut considérer** $\int_u^v f(x)dx$ **pour tous** u,v **hyperréels dans** ${}^*J$.

Par exemple, si ε est un ip > 0 les intégrales suivantes existent

$$\int_{1-\varepsilon}^{3+\varepsilon} x^2 dx\ ,\ \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} x^2 dx\ ,\ \int_{1}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x}\ ,\ \int_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x}$$

mais les intégrales

$$\int_{-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}\ ,\ \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$$

n'existent pas.

De plus

les Propriétés classiques des intégrales faisant l'objet du théorème 30 ainsi que le Théorème de la moyenne sont conservés pour les intégrales ayant des bornes d'intégration hyperréelle

Pour s'en rendre compte il suffit d'appliquer le Principe de transfert à ces résultats. Envisageons par exemple la propriété concernant le module de l'intégrale. Supposons par exemple que $J =]a,b]$. Alors dans les réels le système

$$a < u \leq v \leq b \tag{11.16}$$

entraîne

$$|\int_u^v f(x)dx| \leq \int_u^v |f(x)|dx \ , \tag{11.17}$$

il en est donc de même dans les hyperréels d'où (11.17) est aussi vérifié pour tous u, v dans ${}^*J$ tels que $u \leq v$. De même aussi pour le Théorème de la Moyenne : dans les réels le système (11.16) entraîne qu'il existe un réel w tel que

$$u \leq w \leq v \quad , \quad \int_u^v f(x)dx = (v-u)f(w) \quad . \tag{11.18}$$

On conclut en appliquant la version du Principe de transfert vue à la page 139.

11.10 Calcul approché des intégrales

On sait ce qu'est une intégrale, on connaît un certain nombre de propriétés à leur sujet, mais on ne sait pas encore comment calculer ces intégrales. Avec ce qu'on connaît maintenant on ne peut calculer la valeur exacte de l'intégrale. Pour un tel calcul la définition de l'intégrale est de peu de secours. Pour avoir une méthode qui nous permette de calculer exactement de nombreuses intégrales, il nous faudra attendre le Théorème fondamental (chapitre 13).

Par contre on peut dès maintenant calculer les intégrales de façon approchée, pour cela il suffit de suivre l'idée de la définition : si on prend des pas réels Δx petits et si on calcule la valeur correspondante de la somme de Riemann, on va obtenir une valeur approchée de l'intégrale, plus le pas réel sera petit plus la valeur de la somme de Riemann devrait se rapprocher de la valeur exacte de l'intégrale. Cette méthode est à la base des méthodes développées en Analyse numérique pour calculer les intégrales de façon approchée (mais avec une précision arbitrairement grande), les plus usuelles parmi ces méthodes sont la **Méthode des rectangles**, la **Méthode des trapèzes**et la **Méthode de Simpson**. Explicitons quelque peu ces trois méthodes. La fonction f est supposée être continue dans $[a, b]$ et on note $\mathcal{D}$ la surfaceface délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les verticales $x = a$, $x = b$

Méthode des rectangles

Elle consiste à prendre un naturel m et à calculer l'intégrale au moyen de la somme de Riemann de pas $\frac{b-a}{m}$ et correspondant à la fonction de choix *Milieu*, autrement dit on prend comme valeur approchée de l'intégrale la somme

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m-1} f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2})\frac{b-a}{m}}$$

où $x_k = a + k\frac{b-a}{m}$. Cette méthode tire évidemment son nom du fait que la surface $\mathcal{D}$ est approchée au moyen de rectangles de base $\frac{b-a}{m}$ et dont la hauteur est la valeur de f au milieu de $[x_k, x_{k+1}]$.

Méthode des trapèzes

On considère encore la discrétisation de $[a, b]$ de pas $\frac{b-a}{m}$. Cette fois on approche la surface $\mathcal{D}$ par des trapèzes dont la hauteur est $\frac{b-a}{m}$ et les deux bases mesurent $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$, ainsi on prend comme valeur approchée de l'intégrale la somme

$$\boxed{\frac{b-a}{2m}(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{m-1}) + f(b))\ .}$$

Remarquons que cette expression est la moyenne des sommes de Riemann $S_{ExtrGauche}(\frac{b-a}{m})$ et $S_{ExtrDroite}(\frac{b-a}{m})$.

Méthode de Simpson

On partage l'intervalle $[a, b]$ en un nombre pair d'intervalles, on considère donc le pas $h = \frac{b-a}{2m}$ et les x_k sont les points de la discrétisation de pas h. On approche cette fois la surface D au moyen de m surfaces délimitées par

— l'arc de parabole P_k passant par les trois points du graphe de f d'abscisse x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2},

— l'axe des abscisses et les verticales $x = x_{2k}$, $x = x_{2k+2}$

Ainsi on remplace le graphe de f par une succession de m arcs de paraboles. Si $f(x) \geq 0$ dans $[a, b]$, on prend comme valeur approchée de l'aire de $mathcalD$ la somme des aires des m surfaces délimitées par les arcs de parabole P_k . En général on approche l'intégrale de f dans $[a, b]$ par la somme des m intégrales $I_0, \ldots, I_{m-1}$ où I_k est l'intégrale entre x_{2k} et x_{2k+2} du trinôme du second degré dont le graphe est l'arc de parabole P_k .

Considérons la parabole d'équation $y = Ax^2 + Bx + C$ passant par les trois points $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2), on vérifie aisément que

$$A = \frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}\ ,\ B = \frac{y_2 - y_0}{2h}\ ,\ C = y_1\ .$$

En anticipant sur le Théorème fondamental (que nous verrons au chapitre 13), on obtient

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\ .$$

Dès lors l'intégrale I_k est donnée par

$$I_k = \frac{h}{3}(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}))\ .$$

Par conséquent la méthode de Simpson évalue l'intégrale par la valeur approchée $I_0 + I_1 + \ldots + I_{m-1}$ c'est-à-dire par

$$\boxed{\frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(b))\ .}$$

Parmi ces trois méthodes, la Méthode de Simpson est en général la plus efficace.

Chapitre 12

Théorème de Lagrange et conséquences

Le Théorème joue un rôle essentiel, il va d'abord nous permettre d'obtenir des règles simples simples pour étudier la croissance et la décroissance d'une fonction.

12.1 Théorèmes de Rolle et de Lagrange

Théorème 32 (Théorème de Rolle).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable dans $]a, b[$, continue dans $[a, b]$ et si $f(a) = f(b)$, la dérivée de f s'annule au moins en un réel de $]a, b[$.

Démonstration.
Vu le Théorème des bornes atteintes, il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ pour tout $x \in [a, b]$. Deux cas se présentent :
1. $f(c) = f(d)$. Alors f est constante dans $[a, b]$ et $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.
2. $f(c) \neq f(d)$. Alors, puisque $f(a) = f(b)$, les nombres c, d ne peuvent se trouver tous deux aux extrémités de $[a, b]$, un au moins se trouve dans $]a, b[$, soit c dans $]a, b[$. Alors f admet en c un minimum local. Vu le Principe de Fermat $f'(c) = 0$. □

Théorème 33 (Théorème de Lagrange).
Soit f dérivable dans un intervalle I. Alors pour tous u, v dans ${}^*I$, il existe w entre u et v tel que

$$\boxed{f(v) - f(u) \ = \ (v - u)f'(w)} \, . \tag{12.1}$$

Démonstration.
Raisonnons d'abord dans les réels. Soient u, v réels dans I et $u < v$. Soit G la fonction définie par

$$G(x) := f(x) + K(u - x)$$

où K est une constante réelle. Cette fonction est dérivable dans I. Choisissons la constante K pour que $G(u) = G(v)$, prenons donc

$$K = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \ . \tag{12.2}$$

Vu le Théorème de Rolle appliqué à la fonction $x \mapsto G(x)$ dans l'intervalle $[u, v]$ il existe c réel dans $]u, v[$ tel que : $G'(c) = 0$ et donc tel que $f'(c) = K$. La formule de l'énoncé se déduit dès lors de (12.2).

Envisageons maintenant le cas où u, v sont hyperréels. Ci-dessus on a prouvé que dans $\mathbb{R}$ le système standard $u, v \in I$ entraîne qu'il existe un réel w vérifiant le système standard

$$f(v) - f(u) = (v - u)f'(w) \qquad , \qquad u < w < v \ .$$

En appliquant le Principe de transfert (version de la page 139) on en déduit qu'il en est de même dans $^*\mathbb{R}$. □

Remarque.
On doit rapprocher ce résultat du Théorème des accroissements infinitésimaux. Prenons un réel x_0 dans I et Δx infiniment petit tel que $x_0 + \Delta x$ soit dans $^*I$. D'une part il existe c entre x_0 et $x_0 + \Delta x$ tel que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \ = \ \Delta x f'(c) \ ,$$

d'autrepart

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \ = \ \Delta x f'(x_0) + o(\Delta x) \ .$$

Le remplacement dans f' de x_0 par c est donc le prix à payer pour obtenir exactement $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ et aussi pour pouvoir considérer des Δx non infiniment petits. .

12.2 Croissance, décroissance

Utilisons le Théorème de Lagrange pour étudier la croissance ou la décroissance d'une fonction dans un intervalle tout entier.

Théorème 34. *Soit f dérivable dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

1. *Si dans I on a $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, alors $f(x)$ est strictement croissante, resp. strictement décroissante, dans I .*
2. *Si dans I on a $f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0$, alors $f(x)$ est croissante, resp. décroissante, dans I .*
3. *Si $f'(x) = 0$ dans I, alors $f(x)$ est constante dans I .*

En effet, envisageons le cas $f'(x) > 0$ dans I : soient u, v dans I et $u < v$, il existe $c \in]u, v[$, tel que

$$f(v) - f(u) = (v - u) \cdot f'(c) \ ,$$

c est dans I d'où $f'(c) > 0$ et donc $f(v) - f(u) > 0$.

Voici un résultat capital pour la suite, simple conséquence du Théorème de Lagrange. En effet, appliquant la dernière partie du théorème 34 à $f(x) - g(x)$, on obtient immédiatement :

Corollaire 35. *Soient f, g deux fonctions dérivables dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = g'(x)$ dans I si et seulement s'il existe une constante réelle C telle que $f(x) = g(x) + C$ dans I*

12.3 Application à la recherche d'extrema.

Envisageons la recherche des extrema locaux de f correspondants à des abscisses où f est dérivable. D'après le Théorème de Fermat ces abscisses sont parmi les solutions de $f'(x) = 0$; mais il se peut que $f'(x_0) = 0$ et que f n'admette pas en x_0 d'extremum local, par exemple $x \mapsto x^3$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en 0.

Une première méthode pour trouver les abscisses correspondant aux extrema locaux consiste à étudier le signe de $f'(x)$ et d'en déduire ainsi où $f(x)$ est croissante, décroissante, on peut alors déterminer parmi les solutions de $f'(x) = 0$ les réels donnant lieu à un maximum local et ceux donnant lieu à un minimum local.

Nous verrons plus loin (Théoréme 43 page 182) un autre moyen efficace pour déterminer dans certains cas si une abscisse où la dérivée s'annule donne lieu à un extremum local.

Exemple 12.1. *Admettons que l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (où a, b sont > 0) vaut πab. Soit $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0)$ un point du plan tel que x_0 et y_0 soient > 0. Parmi toutes les ellipses passant par $\boldsymbol{p}_0$ et dont les axes sont $\boldsymbol{o}x$ et $\boldsymbol{o}y$, déterminez s'il y en une qui délimite une aire minimale, une qui délimite une aire maximale.*

Solution. Soient a, b des réels > 0. Cherchons la relation entre a et b pour que l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passe par p_0. En choisissant a comme paramètre on obtient :

$$b^2 = \frac{a^2 {y_0}^2}{a^2 - {x_0}^2} \,.$$

Notons $Aire(a)$ l'aire délimitée par une telle ellipse. Puisque $Aire(a) \geq 0$, les extrema de $Aire(a)$ correspondent aux extrema de $Aire^2(a)$. Cherchons donc les valeurs de $a > 0$ qui donnent lieu à des extrema de

$$Aire^2(a) = \frac{\pi^2 a^4 {y_0}^2}{a^2 - {x_0}^2} \,.$$

On a

$$\frac{d\, Aire^2(a)}{d\, a} = \frac{2\pi^2 y_0^2 a^3 (a^2 - 2x_0^2)}{(a^2 - x_0^2)^2} \,,$$

d'où

a	0		$\sqrt{2}\,x_0$	
$\dfrac{d\,Aire^2(a)}{d\,a}$	0	< 0	0	> 0
$Aire(a)^2$		$\searrow$	min. local	$\nearrow$

L'aire délimitée par l'ellipse a donc un minimum pour $a = \sqrt{2}x_0$ et n'a pas de maximum. La valeur minimum de l'aire vaut

$$Aire(\sqrt{2}x_0) = 2\pi x_0 y_0 \;.$$

Exemple 12.2. *La résistance à la déformation d'une poutre horizontale de section rectangulaire est proportionnelle à la largeur de sa section et au cube de la hauteur de sa section. Quelle est la poutre la plus résistante qui puisse être taillée dans un tronc d'arbre cylindrique de rayon r fixé.*

Solution. Notons h, l respectivement la hauteur, la largeur de le section. Notons D la résistance à la déformation. On a donc

$$D = klh^3 \tag{12.3}$$

où k est une constante > 0.

Cherchons la relation reliant l et h. Puisque la section est un rectangle inscrit dans un cercle de rayon r on a forcément

$$r^2 = (\frac{l}{2})^2 + (\frac{h}{2})^2$$

d'où $4r^2 = l^2 + h^2$. Au vu de (12.3), prenons h comme variable indépendante, ainsi D apparaît comme une fonction $D(h)$. Puisque

$$l = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

on a

$$D(h) = kh^3\sqrt{4r^2 - h^2} \;.$$

Il s'ensuit

$$D'(h) = \frac{4kh^2(3r^2 - h^2)}{\sqrt{4r^2 - h^2}} \;.$$

Le signe de $D'(h)$ est donc donné par le signe de $3r^2 - h^2$, d'où

h	0		$\sqrt{3}r$	
$D'(h)$	> 0	> 0	0	< 0
$D(h)$		$\nearrow$		$\searrow$

$D(h)$ est donc strictement croissant dans $[0, \sqrt{3}r]$ et strictement décroissant dans $[\sqrt{3}r, 0]$, par conséquent $D(h)$ admet un maximum pour $h = \sqrt{3}r$. Il faut donc tailler une poutre dont la hauteur de la section vaut $\sqrt{3}r$ et dont la largeur de la section vaut r .

12.4 Exercices proposés

1. Si $p \cdot V = 20$ et si $p = 4 \pm 0.005$, évaluer V. Quelle est la précision de cette évaluation.
2. Montrer que la somme de deux termes positifs dont le produit est constant est minimum lorsque ces termes sont égaux.
3. En enlevant des carrés égaux aux quatre coins d'une feuille carrée de côté a, on obtient le développement d'une boîte sans couvercle. Quelle doit être la longueur du côté de ces carrés pour obtenir une boîte de volume maximum ?
4. Comment plier une tôle de zinc, large de 12 cm de manière que la gouttière ainsi formée ait la forme d'un trapèze isocèle de grande base 8 cm et que la capacité de cette gouttière soit maximum ?
5. On possède des cercles de métal de rayon r dans lesquels on veut découper un triangle isocèle dont la surface est maximum. Comment procéder ?
6. Une fenêtre normande (rectangle surmonté d'un demi-cercle) doit avoir une surface de 4 mètres carrés. Comment la tracer pour avoir le plus petit périmètre possible ?
7. Par un point donné à l'intérieur d'un angle, mener une droite qui forme avec les deux côtés de l'angle un triangle d'aire minimum.

12.5 Théorème des accroissements infinitésimaux, 3e partie

Rappelons que dans le Théorème des accroissements infinitésimaux, on se plaçait en un réel x_0 et on évaluait $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ pour Δx infiniment petit. A l'occasion de la continuité uniforme, on a vu qu'on pouvait parfois avoir de mauvaises surprises en remplaçant un réel par un hyperréel (voir page 139). On peut dès lors se poser la question :

> *si dans la 2^e partie du Théorème des accroissements infinitésimaux on remplace le réel x_0 par un hyperréel x, les conclusions sont-elles conservées, autrement dit peut-on encore prétendre que*
>
> $$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad ?$$

En fait, comme on va le voir, la réponse à cette question est liée au fait que la dérivée f' soit continue. On définit :

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction réelle f est ***continûment dérivable dans*** *I lorsque f est dérivable dans I et lorsque la dérivée de f dans I est continue dans I.*
Comme précédemment, si l'intervalle I est de la forme $[a, b]$, on considère seulement $f(x)$ pour $a \leq x \leq b$ et en a et b on considère la dérivée à droite, respectivement à gauche.

La réponse à la question posée ci-dessus est affirmative pour une fonction continûment dérivable dans $[a, b]$:

Théorème 36 (Accroissements infinitésimaux, 3^e partie)**.**
Soit f continûment dérivable dans $[a,b]$ (a, b réels). Alors pour tout x dans ${}^*[a,b]$ pour tout Δx infiniment petit non nul tels que $x+\Delta x \in {}^*[a,b]$, la variation $f(x+\Delta x)-f(x)$ est $O(\Delta x)$ et

$$\boxed{f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\cdot f'(x)+o(\Delta x)}\ . \tag{12.4}$$

Démonstration. D'après le Théorème de Lagrange, il existe w entre x et $x+\Delta x$ tel que

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\cdot f'(w)\ . \tag{12.5}$$

On a $w\approx x$. La fonction f' étant continue dans $[a,b]$, on peut lui appliquer le Théorème de Continuité uniforme, par conséquent $f'(x)$ est limité et

$$f'(w)\approx f'(x)\ ,$$

il existe donc ε ip tel que $f'(w)=f'(x)+\varepsilon$. En remplaçant dans (12.5) on obtient

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\cdot f'(x)+\Delta x\cdot\varepsilon=\Delta x\cdot f'(x)+o(\Delta x)\ .$$

$f'(x)$ étant limité, cela entraîne aussi que $f(x+\Delta x)-f(x)$ est $O(\Delta x)$. □

Chapitre 13

Le Théorème fondamental

Pour calculer une intégrale, il est bien connu qu'il faut chercher une primitive et faire varier la primitive entre les bornes d'intégration. Ce résultat essentiel relie de façon très étroite les deux notions de base de l'Analyse, les dérivées et les intégrales. En fait cela fait l'objet d'un théorème qui à juste titre est qualifié de Théorème fondamental de l'Analyse. Pourtant, *a priori et sur base de ce que nous avons vu jusqu'ici, les dérivées et les intégrales sont des notions bien distinctes !* L'histoire des Mathématiques nous confirme cela. Ainsi dès la première moitié du 17^e^ siècle d'illustres mathématiciens tels Fermat, Pascal calculent des aires de parties du plan comprises entre l'axe des abscisses et des courbes d'équation $y = x^n \ \ (n \neq 1\,)$, mais ils calculent ces aires au prix d'ingénieux calculs de sommes d'une infinité d'aires de rectangles. En fait on ne sait pas alors que le calcul de ces aires peut s'effectuer en faisant varier $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ entre les abscisses adéquates. Il faut attendre Newton en 1669 et quelques années plus tard Leibniz pour prendre conscience de cela et découvrir la relation fondamentale entre les aires considérées, autrement dit les intégrales, et l'opération de primitivation qui est l'opération réciproque de la dérivation.

13.1 Le Théorème fondamental, $1^{\text{ère}}$ partie

Théorème 37 (Théorème fondamental, première partie).
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un réel dans I et $f(x)$ continue dans I. Alors la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est dérivable dans I et dans cet intervalle

$$\boxed{\frac{d}{d\,x}\int_{x_0}^{x} f(t)dt \;=\; f(x)\;.}$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto f(t)$ étant continue dans I, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ existe quel que soit x dans ${}^*I$. Pour tout x dans ${}^*I$ posons

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt\;.$$

Fixons un réel x dans I et cherchons à dériver la fonction G en x. Soit Δx un infiniment petit non nul tel que $x+\Delta x$ soit dans ${}^*I$ (on prend cette dernière condition au cas où x serait à une extrémité de l'intervalle I). Evaluons le quotient différetiel de G en x :

$$\begin{aligned}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}(\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt) \\ &= \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt\,.\end{aligned}$$

D'après le Théorème de la moyenne il existe un w entre x et $x+\Delta x$ tel que

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x f(w)\,.$$

Il s'ensuit

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} = f(w)$$

et aussi $w \approx x$. Alors $f(w) \approx f(x)$ et donc

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} \approx f(x)\,.$$

Le quotient différentiel de G est donc limité et a pour partie standard $f(x)$. Ainsi $G'(x) = f(x)$ dans l'intervalle I □

Ainsi **l'opération de dérivation peut être considérée comme l'opération réciproque de l'intégration dans** $[x_0, x]$ **!** Il y a donc un lien très étroit entre les opérations de dérivation et d'intégration.

En particulier, on peut maintenant dériver $\ln x$. Puisque dans $]0, +\infty[$ $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ il s'ensuit immédiatement : $\ln x$ *est dérivable dans* $]0, +\infty[$ *et*

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{dans }]0,+\infty[\ }\,.$$

13.2 Primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition. *La fonction H est une primitive de f dans I lorsque $H'(x) = f(x)$ dans l'intervalle I.*

L'opération de primitivation, qui consiste à chercher une primitive de la fonction considérée, est donc l'opération réciproque de la dérivation.
Attention : rappelons-nous que lorsqu'on considère la dérivée dans un intervalle dont une extrémité est fermée, en cette extrémité par $f'(x)$ on entend la dérivée à droite ou à gauche selon qu'il s'agit de l'extrémité gauche ou de l'extrémité droite, il en est donc de même pour les primitives. Ainsi, si on dit que $H(x)$ est une primitive de $f(x)$ dans $[a, b]$ cela signifie :

— en tout point de $]a, b[$, on a $H'(x) = f(x)$,
— $f(a)$ est la dérivée à droite de $H(x)$ en a,
— $f(b)$ est la dérivée à gauche de $H(x)$ en b.

Par exemple $\sin x$ est une primitive de $\cos x$ dans $\mathbb{R}$ et $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $\sqrt{x}$ dans $[0, +\infty[$.

Se pose évidemment la question de l'existence d'une primitive pour une fonction donnée. La réponse est donnée par le Théorème fondamental, en effet d'après celui-ci, si f est continue dans I et si nous fixons un x_0 dans I, la fonction

$$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est une primitive de f dans I , par conséquent :

Théorème 38 (Existence des Primitives)**.**
Toute fonction continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive dans cet intervalle.

Bien entendu il ne peut y avoir unicité de la primitive d'une fonction, en effet si on ajoute une constante à une fonction dérivable, la dérivée ne va pas être modifiée. Là aussi la situation peut être précisée : d'après le corollaire 35 on a :

> *Si H_1 est une primitive de f dans un intervalle I, alors une fonction H_2 est une primitive de f dans I si et seulement s'il existe une constante réelle C telle que $H_1(x) = H_2(x) + C$ pour tout $x \in I$.*

Par conséquent

> *toutes les primitives d'une même fonction dans un intervalle sont égales entre elles à une constante additive près.*

Mais attention si on travaille dans plusieurs intervalles ouverts I_1, I_2, ... ne se touchant pas, on peut ajouter à une primitive H de f une constante C_1 dans l'intervalle I_1, une constante C_2 dans l'intervalle I_2 ... , la fonction ainsi obtenue est encore une primitive de f dans les intervalles considérés. Par conséquent quand on parle "d'égalité à une constante additive près" il faut savoir que si on se place dans plusieurs intervalles ouverts ne se touchant pas, la constante qu'il faut ajouter à une fonction pour avoir l'autre peut très bien varier d'un intervalle ouvert à un autre.

Notation
Pour représenter le fait que deux fonctions f, g soient égales à une constante additive près, on peut écrire $\boldsymbol{f(x) = g(x) + C}$ où C représente une constante arbitraire, mais on écrit aussi $\boldsymbol{f(x) \simeq g(x)}$

A priori, au vu de la définition, il serait normal de représenter les primitives d'une fonction $f(x)$ par exemple par la notation $D^{-1}f(x)$, il n'en est pourtant pas ainsi : les primitives d'une fonction $f(x)$ se notent

$$\int f(x)dx \,. \tag{13.1}$$

Cela peut sembler anormal alors qu'au vu de la définition l'opération de primitivation a priori ne serait pas liée à l'intégration ! Mais depuis le Théorème fondamental, on sait que cela est faux, on sait que pour obtenir une primitive de $f(x)$ il faut considérer l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Précisément voilà la raison de la notation (13.1) : **cette notation est en quelque sorte une "abréviation" de** $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. C'est aussi la raison pour laquelle, dans le passé, les primitives étaient aussi appelées *intégrales indéfinies* tandis que les intégrales étaient appelées *intégrales définies.* Ainsi lorsqu'on écrit (13.1) la variable x n'occupe pas sa vraie place, la variable x devrait en fait prendre la place de la borne supérieure d'intégration. On comprend dès lors pourquoi la notation $\int_a^b f(x)dx$ désigne un nombre ne dépendant pas de x mais dépendant de a et de b, tandis que la notation (13.1) représente une fonction dont la variable est x.

13.3 Théorème fondamental, 2^e partie

La 2^e partie du Théorème fondamental va enfin nous permettre de calculer des intégrales en faisant varier une primitive entre les bornes d'intégration.

Théorème 39 (Théorème fondamental, deuxième partie)**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et f continue dans $[a, b]$. Supposons que H soit une primitive de f dans $[a, b]$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = H(b) - H(a) .}$$

Démonstration. Soient x_0 un réel fixé dans $[a, b]$ et

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt .$$

G et H étant deux primitives de f dans $[a, b]$, il existe une constante réelle C telle que $G(x) = H(x) + C$ dans $[a, b]$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{b} f(t)dt = -G(a) + G(b) \\ &= H(b) + C - H(a) - C = H(b) - H(a) . \end{aligned}$$

□

Par exemple :

$\int \sin x dx \simeq -\cos x$ dans $\mathbb{R}$ d'où

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2 .$$

$\int \frac{dx}{1+x^2} \simeq \operatorname{arctg} x$ dans $\mathbb{R}$ d'où

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2} .$$

$\int \sqrt{x}dx \simeq \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ dans $[0, +\infty[$, d'où

$$\int_0^2 \sqrt{x}dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \,.$$

Notation : la variation de $H(x)$ entre a et b, c'est-à-dire $H(b) - H(a)$, est souvent notée $[\boldsymbol{H(x)}]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$

13.4 Exercices résolus

Exercice 13.1. *Dérivons la fonction*

$$x \longmapsto \int_1^{\sin x} \sqrt{1+t^2}dt \,.$$

Solution. La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est continue dans $\mathbb{R}$. Par conséquent dans $\mathbb{R}$

$$\frac{d}{du}\int_1^{u} \sqrt{1+t^2}dt = \sqrt{1+u^2} \,.$$

En utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée on obtient dans $\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\sin x} \sqrt{1+t^2}dt = (\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x} \,.$$

Exercice 13.2. *Soit f une fonction continue dans $[0,4]$ telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0,4]$. Que peut-on dire de la fonction h suivante :*

$$h \,:\, x \mapsto \int_0^{x^2} f(t)dt \quad ?$$

Solution. Pour u dans $[0,4]$ posons

$$G(u) := \int_0^{u} f(t)dt \,.$$

Dans $[0,4]$ on a $G'(u) = f(u)$. Or $h(x) = G(x^2)$. Puisque $x^2 \in [0,4]$ si et seulement si $x \in [-2,2]$ et vu les règles concernant la dérivée d'une fonction composée, la fonction h est dérivable dans $[-2,2]$ et dans $h'(x) = 2xf(x^2)$ dans $[-2,2]$.

Ainsi $h'(x) < 0$ dans $[-2,0[$ et $h'(x) > 0$ dans $]0,2]$; la fonction h est donc strictement décroissante dans $[-2,0[$, strictement croissante dans $]0,2]$ et admet en 0 un minimum valant 0.

13.5 Exercices

1. Soit f continue dans un I. Dérivez les fonctions suivantes en indiquant où cela est possible :

$$f_1 : x \longmapsto \int_1^{2x^3} f(t)\,dt \quad \text{avec} \quad I = \mathbb{R}\ ,$$

$$f_2 : x \longmapsto \int_0^{2\sin x} f(t)\,dt \quad \text{avec} \quad I = [0, +\infty[\ ,$$

$$f_3 : x \longmapsto \int_{x^2}^{2x^2} f(t)\,dt \quad \text{avec} \quad I = [2, +\infty[\ .$$

2. Sachant que f est continu et strictement croissant dans $\mathbb{R}$ et que $f(1) = 0$. Dérivez la fonction G définie ci-dessous et cherchez ses extrema locaux dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$G(x) := \int_0^{2\cos x} f(t)dt\ .$$

Chapitre 14

Logarithmes et exponentielles

14.1 Logarithme népérien

On a déjà défini le logarithme népérien. On sait que $\ln u$ est défini pour tout $u > 0$ par :

$$\boxed{\ln u = \int_1^u \frac{1}{t} dt \ .} \tag{14.1}$$

Comme toute fonction réelle, la fonction $\ln x$ a une extension standard, par conséquent la formule (14.1) est vérifiée pour tout hyperréel $u > 0$.

On a déjà remarqué que $\ln x$ est strictement croissant et grâce au Théorème fondamental, on sait aussi

$$\boxed{\ln'(x) \ = \ \frac{1}{x} \, .}$$

Par conséquent $\ln x$ est la seule primitive de $\frac{1}{x}$ dans $]0, +\infty[$ dont la valeur en 1 soit 0. Nous allons maintenant compléter ces résultats.

Théorème 40. *Si u et v sont des réels > 0*

$$\boxed{\ln(u \cdot v) \ = \ \ln u + \ln v \ .} \tag{14.2}$$

Démonstration. Soient u un réel > 0 fixé et g la fonction définie par

$$g : x > 0 \longmapsto ln(u \cdot x) \ .$$

Dans $]0, +\infty[$, on a

$$g'(x) = 1/x = (\ln x)' \, .$$

Il existe donc une constante C telle que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on ait

$$\ln x = g(x) + C = \ln(u \cdot x) + C \ .$$

En faisant $x = 1$ nous obtenons $C = -\ln u$, d'où

$$\ln(u \cdot x) \ = \ \ln u + \ln x \ .$$

$\square$

Il s'ensuit :

Si u, v *sont des réels* > 0 *et si* α *est un rationnel*[1],

$$\boxed{\ln\frac{1}{u} = -\ln u \quad , \quad \ln\frac{u}{v} = \ln u - \ln v \quad , \quad \ln u^{\alpha} = \alpha \cdot \ln u \ .} \tag{14.3}$$

Démonstration. De

$$\ln(u) + \ln(\frac{1}{u}) = \ln(u \cdot \frac{1}{u}) = \ln 1 = 0$$

il découle les deux premières formules. Prouvons la troisième. Si α est un naturel > 0, il suffit d'itérer la règle (14.2). Si $\alpha = 0$, la formule est vérifiée puisque $\ln 1 = 0$. Si $\alpha = -m$ avec m un naturel > 0 , on a

$$\ln u^{-m} = m \ln\frac{1}{u} = -m \ln u \ .$$

Considérons $\alpha = p/q$ avec $p,\ q$ des naturels > 0 , on a

$$\left(u^{p/q}\right)^q = u^p$$

d'où

$$q \ln(u^{p/q}) = p \cdot \ln u$$

et la formule annoncée est bien démontrée. □

Remarquons qu'en appliquant la Règle de transfert on voit que les formules (14.2), (14.3) sont vérifiées pour tous hyperréels $u, v > 0$.

Montrons

$$\ln 2 < 1 < \ln 3 \tag{14.4}$$

Considérons la figure 14.1. Il est évident que $\ln 2 < 1$. D'autre part

$$\ln 3 > \frac{1}{4}(\frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} + \frac{4}{8} + + \frac{4}{9} + \frac{4}{10} + \frac{4}{11} + \frac{4}{12}) = \frac{28271}{27720} > 1 \ .$$

Puisque $\ln x$ est continu dans $]0, +\infty[$, en appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires à (14.4), on voit qu'il existe un réel u entre 2 et 3 tel que $\ln u = 1$, vu le caractère strictement croissant de $\ln x$ un tel réel est forcément unique, ce réel est particulièrement important et porte un nom particulier :

Définition. *Le* ***nombre e*** *est l'unique réel* u *tel que* $\ln u = 1$.

Par conséquent

$$\boxed{2 < e < 3} \ .$$

Plus tard on verra comment la Formule de Taylor permet de calculer le nombre e avec une précision arbitrairement grande, nous pourrons alors chercher un nombre arbitraire de décimales de e et voir que $e = 2.7182...$. Signalons que le nombre e est un nombre irrationnel et même un nombre transcendant.

1. cette condition sera abandonnée dès qu'on aura vu les exposants irrationnels

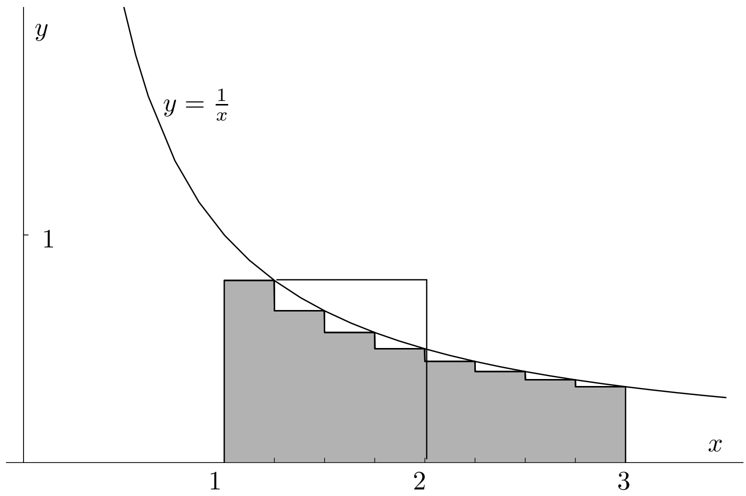


FIGURE 14.1: $\ln 2 < 1 < \ln 3$

Soit r un réel quelconque, en prenant pour p la partie entière de r on a $p \leq r < p+1$ et donc

$$\ln(e^p) \leq r < \ln(e^{p+1}) \; .$$

En appliquant encore le Théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel v tel que $\ln v = r$, autrement dit

$$\boxed{\textit{l'ensemble des valeurs de la fonction } \ln x \textit{ est } \mathbb{R}\,.}$$

Cherchons les limites de $\ln x$ en 0 et $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ln x \;=\; -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x \;=\; +\infty} \, . \tag{14.5}$$

En effet : soient H un ig > 0 et m un naturel quelconque, on a $H > e^m$ d'où $\ln H > \ln(e^m) = m$, ainsi $\ln H$ est plus grand que tous les naturels et est donc ig positif. La limite en 0 se déduit de la limite en $+\infty$: si ε est un ip > 0, $1/\varepsilon$ est un ig > 0 d'où $\ln \varepsilon = \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ est un ig < 0.

Sur la figure 14.2, on a représenté le graphe de $\ln x$.

14.2 La fonction exponentielle

La fonction $x \longmapsto \ln x$ étant strictement croissante admet une fonction réciproque, d'où :

Définition. *La* ***fonction exponentielle****, notée* ***exp****, est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$, autrement dit*

$$\boxed{v = \exp(u) \quad \textit{si et seulement si} \quad u = \ln v\,,} \tag{14.6}$$

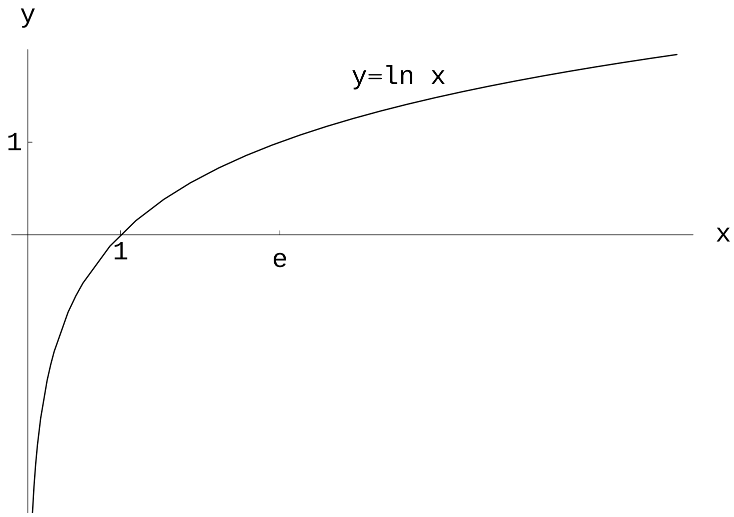


FIGURE 14.2: Graphe de $\ln x$

En particulier

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \exp(1) = e \, .$$

Au vu de ce qu'on sait à propos de $\ln x$, on a :

la fonction $\exp(x)$ *est strictement croissante, son ensemble de définition est* $\mathbb{R}$ *et son ensemble de valeurs est* $]0, +\infty[$ *et*

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \, .$$

Des propriétés de $\ln x$ on déduit encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \exp(u+v) &= \exp(u) \cdot \exp(v) \, , \\ \exp(-u) &= \frac{1}{\exp(u)} \, , \\ \exp(u-v) &= \frac{\exp(u)}{\exp(v)} \, , \\ \exp(\alpha \cdot u) &= (\exp(u))^{\alpha} \, . \end{aligned}}$$

En effet pour prouver l'égalité de nombres il suffit de prouver l'égalité de leur logarithme, ainsi pour prouver la première de ces formules, il suffit de remarquer

$$\ln(\exp(u)\exp(v)) = \ln(\exp(u)) + \ln(\exp(v)) = u + v = \ln(exp(u+v)) \, .$$

Dérivons la fonction exponentielle. Remarquons d'abord que, vu le Théorème de continuité des fonctions monotones, $\exp(x)$ est continu dans $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel fixé

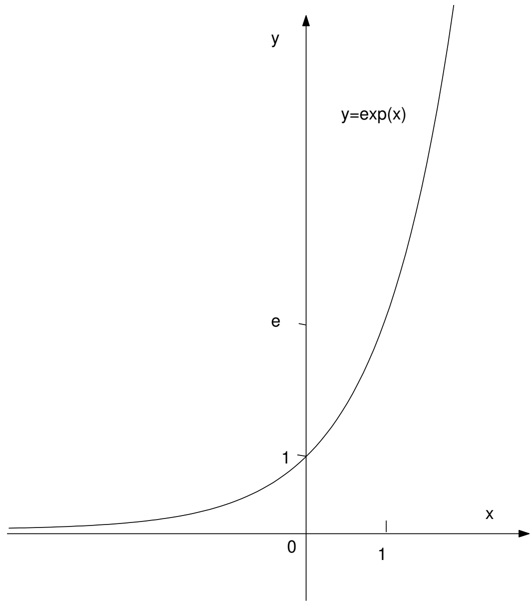


Figure 14.3: Graphe de $\exp(x)$

et Δx un ip $\neq 0$. Pour nous ramener à la dérivée de ln, posons

$$y_0 := exp(x_0) \quad \text{et} \quad y_0 + \Delta y := exp(x_0 + \Delta x)\ .$$

Vu la continuité de $exp(x)$, la variation Δy est ip et est $\neq 0$. On a

$$x_0 = \ln(y_0) \quad \text{et } x_0 + \Delta x = \ln(y_0 + \Delta y)\ .$$

Le quotient différentiel de exp s'écrit :

$$QD = \frac{exp(x_0 + \Delta x) - exp(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\ln(y_0 + \Delta y) - \ln(y_0)} = \frac{1}{QD_{ln}}$$

où QD_{ln} est le quotient différentiel de $\ln y$ en y_0. Or $QD_{ln} \approx \frac{1}{y_0}$ et est donc appréciable. Par conséquent QD est aussi appréciable et

$$\text{st}(QD) = y_0 = exp(x_0)\ .$$

Par conséquent la dérivée de $\exp(x)$ en x_0 vaut $\exp(x_0)$. En conclusion

$$\boxed{\exp'(x) \ = \ \exp(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}}\ .$$

14.3 Exposants quelconques

Ici a est un réel > 0.

On connaît déjà les puissances à exposants rationnels (voir page 137). Nous voudrions ici donner un sens à a^r pour tout réel r de telle sorte que les propriétés élémentaires des exposants rationnels soient maintenues pour tous les exposants réels. Il nous reste donc à définir des puissances à exposants irrationnels.

D'après (14.3), pour tout rationnel q on a

$$a^q = \exp(\ln(a^q)) = \exp(q \cdot \ln a)\ . \tag{14.7}$$

Dès lors tentons la définition suivante :

Définition. *Soit* $a > 0$ *et* r *un irrationnel, alors posons*

$$\boxed{a^r \ := \ \exp(r \cdot \ln a)}\ .$$

La formule (14.7) est donc vérifiée pour tout réel q et donc :

Pour tout $a > 0$ et pour tout u, on a

$$\boxed{a^u \ = \ \exp(u \cdot \ln a)}\ . \tag{14.8}$$

La définition ci-dessus des puissances à exposants irrationnels convient. En effet, comme on va le voir, elle conserve les propriétés bien connues des exposants rationnels. Envisageons trois de ces propriétés.

1. Cherchons $a^{(r_1+r_2)}$.

$$a^{(r_1+r_2)} = \exp((r_1 + r_2) \cdot \ln a) = \exp(r_1 \cdot \ln a) \cdot \exp(r_2 \cdot \ln a) = a^{r_1} \cdot a^{r_2}\ .$$

2. On a aussi $\ln(a^r) = \ln(\exp(r \cdot \ln a)) = r \cdot \ln a$.
3. Cherchons $a^{r_1 \cdot r_2}$:

$$a^{r_1 \cdot r_2} = \exp(r_1 \cdot r_2 \cdot \ln a) = \exp(r_2 \cdot \ln(a^{r_1})) = (a^{r_1})^{r_2}\ .$$

Ainsi pour tous $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$, et pour tous u, u_1, u_2, on a

$$\boxed{\begin{array}{c}
\begin{array}{rcl}
a^{(u_1+u_2)} = a^{u_1} \cdot a^{u_2} & , & a^{(u_1-u_2)} = \dfrac{a^{u_1}}{a^{u_2}} \\
a^{(u_1 \cdot u_2)} = (a^{u_1})^{u_2} & , & a^{-u} = \dfrac{1}{a^u} \\
(a \cdot b)^u = a^u \cdot b^u & , & (\dfrac{a}{b})^u = \dfrac{a^u}{b^u}
\end{array} \\[2em]
\begin{array}{rcl}
(1 < a \text{ et } u_1 < u_2) & \text{entraîne} & a^{u_1} < a^{u_2} \\
(0 < u \text{ et } a < b) & \text{entraîne} & a^u < b^u
\end{array} \\[1em]
\ln(a^u) = u \cdot \ln a\ .
\end{array}}$$

Puisque $\ln e = 1$, on a aussi

$$\boxed{\exp(x) \ = \ e^x\ .}$$

Autrement dit *la fonction exponentielle* exp *est aussi la fonction* $x \longmapsto e^x$.

Soit α un réel > 0. Si ε est un ip > 0 et si H est un ig > 0, on a

$$\varepsilon^\alpha = \exp^{\alpha \ln \varepsilon} \text{ et } H^\alpha = \exp^{\alpha \ln H} \quad .$$

On sait que $\ln \varepsilon$ est ig < 0 et $\ln H$ est ig > 0, il s'ensuit que ε^α est un ip et que H^α est un ig > 0. Si l'exposant α était négatif, il faudrait inverser les réponses, autrement dit :

si α réel > 0	$IP^\alpha = IP$	$IG^\alpha = IG$
si α réel < 0	$IP^\alpha = IG$	$IG^\alpha = IP$

Fonction puissance à exposant réel α

Auparavant, on pouvait déjà considéré les fonctions puissances à exposants rationnels. Ainsi $x^{\frac{4}{3}}$ était définie comme étant $(\sqrt[3]{x})^4$ dans $\mathbb{R}$ tout entier, tandis que $x^{\frac{3}{4}}$ était définie comme étant $(\sqrt[4]{x})^3$ dans $[0, +\infty[$. Maintenant on peut aussi considérer les *fonctions puissances à exposant irrationel*, c'est-à-dire les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ où α est une constante irrationnelle qui sont définies seulement pour $x > 0$.

Que l'exposant α soit rationnel ou irrationnel, dérivons x^α en nous limitant où cela est toujours possible c'est-à-dire à l'intervalle $]0, +\infty[$. Utilisons la formule

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \, .$$

Ainsi on a

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

d'où

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{dans }]0, \infty[} \, .$$

On retrouve ainsi la règle qu'on a déjà rencontré dans de nombreux cas particuliers.

Fonction exponentielle en base λ

On peut aussi aussi considérer la fonction **exponentielle en base λ, la base étant un réel** $\lambda > 1$ fixé : il s'agit de la fonction $x \mapsto \lambda^x$. Elle est définie dans $\mathbb{R}$ tout entier et donc aussi dans $^*\mathbb{R}$. On étudie aisément cette fonction grâce à

$$\lambda^x = e^{x \ln \lambda} \, . \tag{14.9}$$

Ainsi cette fonction est strictement croissante.

Soient ε ip, H ig positif. On a

$$\lambda^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln \lambda} \approx 1 \, ,$$

de plus, puisque $\lambda^H = e^{H \ln \lambda}$ et $\ln \lambda > 0$, le nombre λ^H est ig positif et, puisque $\lambda^{-H} = \frac{1}{\lambda^H}$, le nombre λ^{-H} est ip. En résumé, si $\lambda > 1$

$$\boxed{\lambda^{IP} \approx 1 \quad , \quad \lambda^{IG>0} \text{ est } IG > 0 \quad , \quad \lambda^{IG<0} \text{ est } IP}$$

14.4 Ordres de grandeurs de $\ln H$, H^α, λ^H et $H!$

Soient α un exposant réel > 0, λ un réel > 1 et H un infiniment grand positif. Comparons les infiniment grands $\ln H$, λ^H et H^α et $H!$.

1. Comparons d'abord $\ln H$ et H^α.

$$\boxed{\frac{\ln H}{H^\alpha} \approx 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0}\,. \tag{14.10}$$

Démonstration. Envisageons d'abord le cas de $\frac{\ln x}{x}$. Pour tout $x > 1$, on a

$$0 < \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{dt}{t} \le \frac{1}{x}\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\frac{\sqrt{x}-1}{x}\,.$$

En particulier, si H ig > 0,

$$0 < 2\frac{\sqrt{H}-1}{H} = 2(\frac{1}{\sqrt{H}} - \frac{1}{H}) \approx 0\,,$$

le rapport $\frac{\ln H}{H}$ est compris entre deux ip et est donc aussi ip.

Pour $\frac{\ln H}{H^\alpha}$, remarquons

$$\frac{\ln H}{H^\alpha} = \frac{\frac{1}{\alpha}\ln(H^\alpha)}{H^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln G}{G}$$

si on pose $G = H^\alpha$. Mais G est ig > 0 et donc $\frac{\ln G}{G} \approx 0$ d'où $\frac{\ln H}{H^\alpha} \approx 0$. □

2. Comparons maintenant H^α et λ^H. Pour cela ramenons-nous au cas ci-dessus : posons $G := \lambda^H = e^{H\ln\lambda}$. Le nombre G est un ig > 0 et $H = \frac{\ln G}{\ln \lambda}$. On a donc

$$\frac{H^\alpha}{\lambda^H} = \frac{(\ln G)^\alpha}{(\ln\lambda)^\alpha G} = \frac{1}{(\ln\lambda)^\alpha}(\frac{\ln G}{G^{\frac{1}{\alpha}}})^\alpha\,. \tag{14.11}$$

Vu (14.10), la fraction $(\ln G)/G^{\frac{1}{\alpha}}$ est ip et l'expression (14.11) est un aussi ip, d'où

$$\boxed{\frac{H^\alpha}{\lambda^H} \approx 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\lambda^x} = 0}\,. \tag{14.12}$$

3. Jusqu'ici l'ordre de grandeur le plus élevé est celui de λ^H. Montrons que l'ordre de grandeur de $H!$ est encore plus élevé, prouvons :
pour tout H hypernaturel infiniment grand,

$$\boxed{\frac{\lambda^H}{H!} \approx 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = 0}\,. \tag{14.13}$$

Démonstration. Fixons un naturel t supérieur à λ. Soit k un naturel $> t$. Alors

$$\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^t}{(t-1)!} \cdot \frac{\lambda^{k-t}}{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (k-1)} \cdot \frac{1}{k} \quad .$$

La fraction $\frac{\lambda^t}{(t-1)!}$ est une constante réelle ne dépendant pas de k, notons-la C. Le produit $t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (k-1)$ compte $k-t$ facteurs tous $\geq \lambda$, d'où

$$0 < \frac{\lambda^{k-t}}{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (k-1)} \leq 1 \ .$$

Par conséquent

$$0 < \frac{\lambda^k}{k!} \leq \frac{C}{k} \ .$$

L'inégalité ci-dessus est vérifié pour tout naturel $k \geq t$, d'où, vu le Principe de transfert, il en de même pour tout hypernaturel $k \geq t$. En particulier, si H est un hypernaturel ig, on a $0 < \frac{\lambda^H}{H!} \leq \frac{C}{H}$ d'où $\frac{\lambda^H}{H!}$ est ip. □

Une indétermination importante reste à lever, la voici :

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1} \ .$$

Soit $x \approx 1$ et $x \neq 1$. Vu le Théorème de la Moyenne et la définition de $\ln x$, il existe u entre x et 1 tel que

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{u} \ ,$$

puisque $x \approx 1$, on a $u \approx 1$ et par conséquent

$$\frac{\ln x}{x-1} \approx 1 \ .$$

14.5 Logarithme en base λ

La base est un réel $\lambda > 1$.

Soit $u > 0$. Remarquons $u = \lambda^v$ est équivalent à $u = e^{v \ln \lambda}$, c'est-à-dire $v = \frac{\ln u}{\ln \lambda}$. Par conséquent :

*pour tout nombre $u > 0$, il existe un et un seul nombre v tel que $u = \lambda^v$, ce nombre v est appelé le **logarithme de** u **en base** λ et est noté $\log_\lambda u$. Autrement dit le logarithme d'un nombre > 0 est l'exposant qu'il faut donner à la base pour obtenir ce nombre.*

Par exemple

$$\log_4 16 = 2 \ , \ \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \ , \ \log_{\sqrt{3}} 9 = 4 \ , \ \log_9 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{4} \ .$$

Le logarithme népérien est donc le logarithme en base e. Le logarithme en base 10 d'un réel $u > 0$ est simplement noté $\boldsymbol{\log u}$.

Ci-dessus on a en fait prouvé :

$$\boxed{\log_\lambda u = \frac{\ln u}{\ln \lambda}}\,. \tag{14.14}$$

Cette formule permet d'étendre immédiatement les formules vues à propos de $\ln u$ aux logarithmes dans une base quelconque : si $u\,,\, v > 0\,,$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \log_\lambda(uv) & = & \log_\lambda u + \log_\lambda v\ , \\ \log_\lambda \dfrac{1}{u} & = & -\log_\lambda u\ , \\ \log_\lambda \dfrac{u}{v} & = & \log_\lambda u - \log_\lambda v\ , \\ \log_\lambda u^\alpha & = & \alpha \log_\lambda u\ . \end{array}}$$

De (14.14), il découle la *Formule de changement de base* : si $\mu > 1$ et $u > 0$

$$\log_\mu u = \frac{\log_\lambda u}{\log_\lambda \mu}\ .$$

14.6 Exercices

1. Sans utiliser la calculatrice, cherchez :
   1) $\log_4 8$
   2) $\log_{2\sqrt{3}} \dfrac{1}{144}$
   3) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{16}$
   4) $3^{\log_{\sqrt{3}} 10}$
   5) $2^{\log_4 5}$
   6) $16^{\log_8 3}$
2. Résoudre
   1) $\ln 2x \geq -\ln(x+1)$
   2) $\log_2 x > \log_8(3x-2)$
   3) $8 \cdot 2^x = (\sqrt{2})^{x-1}$
   4) $e^x < 10^x$
3. Des mathématiciens ont prouvé que le nombre $2^{44497} - 1$ était premier. Combien de chiffres trouve-t-on dans son écriture décimale ?
4. En Chimie, on définit le pH d'une solution acide : pH$=\log \dfrac{1}{[H+]}$ où $[H+]$ est la concentration en ions $H+$, c-à-d le nombre de moles $H+$ par litre de solution.
   (a) Quel est le pH d'une solution contenant $2 \cdot 10^{-10}$ moles $H+$ par litre ?
   (b) Quelle est la concentration en ions $H+$ d'une solution dont le pH est 4 ?
   (c) Si la concentration en ions $H+$ augmente de 5%, comment varie son pH ?

Chapitre 15

Formule de Taylor d'ordre deux

La Formule de Taylor d'ordre deux poursuit la même idée que le Théorème de Lagrange et va plus loin en utilisant la dérivée seconde.

Soit $f(x)$ une fonction réelle. La dérivéé seconde $f''(x)$, notée aussi $\frac{d^2 f}{dx}$ ou encore $f^{(2)}(x)$, est bien entendu obtenue en dérivant f', autrement dit $f''(x) = (f'(x))'$.

15.1 Formule de Taylor d'ordre deux

Théorème 41 (Formule de Taylor d'ordre deux)**.**
Soient I un intervalle, f dérivable 2 fois dans I et a un réel dans I. Pour tout réel x dans I différent de a, il existe un réel c dans $]a, x[$ ou $]x, a[$ (selon que $a < x$ ou $x < a$) tel que

$$\boxed{f(x) \ = \ f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(c) \ .}$$

Démonstration. On raisonne comme dans la preuve du Théorème de Lagrange, la seule différence est qu'on considère une autre fonction $G(y)$. Fixons x dans I, $x \neq a$. Posons cette fois

$$G(y) := f(y) + (x-y)f'(y) + K(x-y)^2 \ .$$

où K est une constante. Cherchons la valeur à donner à K pour que $G(x) = G(a)$. Il suffit pour cela d'avoir

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + K(x-a)^2$$

et donc de prendre

$$K := \frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{(x-a)^2} \ . \tag{15.1}$$

Ainsi $G(a) = G(x)$, de plus $G(y)$ est dérivable dans I, d'où également dans $[a, x]$ ou $[x, a]$. En appliquant le Théorème de Rolle, on obtient un réel c dans $]a, x[$ ou $]x, a[$ tel que $G'(c) = 0$. Or

$$G'(y) = (x-y)(f''(y) - 2K) \ .$$

Puisque $c \neq x$, nous avons forcément $K = \frac{f''(c)}{2}$, d'où la formule annoncée en remplaçant dans (15.1). □

Il faut remarquer que *le nombre c dont il est ici question dépend bien entendu de la fonction considérée, de a mais aussi de x ; si nous modifions x il faut s'attendre à ce que c change.*

Remarque Grâce au Principe de transfert, on peut également appliquer la Formule de Taylor pour x hyperréel dans ${}^*I$, le c est alors un hyperréel se trouvant entre a et x.

La formule de Taylor d'ordre 2 s'énonce encore :

Si f est dérivable deux fois dans un intervalle I et si x_0, $x_0 + \Delta x$ sont dans ${}^*I$ (Δx étant hyperréel, éventuellement réel), alors il existe c entre x_0 et $x_0 + \Delta x$ tel que

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x\, f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(c)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df_{x_0}(\Delta x) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(c)\ .} \tag{15.2}$$

Ainsi on **élargit le champ d'application de la différentielle**, on va pouvoir calculer la variation de la fonction au moyen de la différentielle même lorsque Δx n'est pas assimilable à un infiniment petit et évaluer l'erreur ainsi commise puisque cette erreur vaut

$$|\frac{\Delta x^2}{2} f''(c)|\ .$$

Si on sait que dans l'intervalle I on a $|f''(x)| \leq K$ (K étant une constante réelle), alors l'erreur commise en calculant la variation de la fonction au moyen de $df_{x_0}(\Delta x)$ est donc $\leq \frac{K \cdot \Delta x^2}{2}$.

Une fonction f est dite 2 ***fois continûment dérivable dans un intervalle*** I *lorsque f est dérivable deux fois dans I et $f''(x)$ est continue dans I*. Remarquons qu'alors $f(x)$ et $f'(x)$ sont toutes deux continues dans I.

Supposons f 2 fois continûment dérivable dans I. Prenons Δx ip $\neq 0$, analysons l'erreur commise $\frac{\Delta x^2}{2} f''(c)$. Alors $c \approx x_0$ et, puisque $f''(x)$ est continue dans I, on a $f''(c) = f''(x_0) + IP$, d'où

$$\frac{\Delta x^2}{2} f''(c) = \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_0) + o(\Delta x^2)\ ,$$

on a ainsi prouvé

Théorème 42. *Si f est 2 fois continûment dérivable dans I, alors pour tout x_0 dans I et pour tout Δx ip $\neq 0$ tel que $x_0 + \Delta x$ soit dans ${}^*I$, on a*

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_0) + o(\Delta x^2)\ .} \tag{15.3}$$

Application à $\sin x$

Dans de nombreuses applications, lorsque la mesure α d'un angle est petite, on assimile $\sin\alpha$ à α, voyons quand cela est légitime. Convenons : si δ est un réel > 0, la proposition "$\boldsymbol{a = a'}$ **à** $\boldsymbol{\delta}$ **près**" signifie que $|a - a'| < \delta$.

Estimons $\sin x$ *à* δ *près.*
Pour tout $x \neq 0$ il existe c entre 0 et x tel que

$$\sin x = x - \frac{x^2}{2}\sin(c) .$$

De plus

$$|\sin c| \leq |c| < |x| ,$$

il s'ensuit

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{2} . \tag{15.4}$$

Soit δ la précision considérée (δ est un réel > 0), pour que $|\sin x - x| < \delta$ il suffit donc que $|x| < \sqrt[3]{2\delta}$; autrement dit si $|x| < \sqrt[3]{2\delta}$, on $\sin x = x$ à δ près. Envisageons un cas concret en prenant $\delta = 10^{-3}$: si $|x| < 0.12$ (radian !), on a $\sin x = x$ à 10^{-3} près.

Soit ε ip. Vu (15.3), on sait déjà $\sin\varepsilon = \varepsilon + o(\varepsilon^2)$, mais on peut faire mieux. En effet, d'après le Principe de transfert, l'inégalité 15.4, est encore vérifiée pour tout $x = \varepsilon$. Il s'ensuit

$$0 \leq \frac{|\sin\varepsilon - \varepsilon|}{\varepsilon^3} \leq \frac{1}{2}$$

la fraction $\frac{|\sin\varepsilon - \varepsilon|}{\varepsilon^3}$ est donc limité, autrement dit :

$$\boxed{\sin(\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^3)} . \tag{15.5}$$

Exercice. *La fonction* ***sinus cardinal*** *notée* **sinc** *est la fonction définie par*

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 , \\ 1 & si\ x = 0 . \end{cases}$$

Puisque $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1$ *pour* ε *ip, on sait déjà que la fonction* $\operatorname{sinc}(x)$ *est continue dans* $\mathbb{R}$. *Elle est aussi dérivable dans* $\mathbb{R}_0$. *Dérivons* $\operatorname{sinc}(x)$ *en* 0.

Solution. Pour dériver $\operatorname{sinc}(x)$ en 0, on doit appliquer la définition de la dérivée. Soit Δx ip $\neq 0$, le quotient différentiel en 0 s'écrit

$$QD = \frac{\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x) - \Delta x}{\Delta x^2}$$

Vu (15.5)

$$QD = \frac{LIM \cdot \Delta x^3}{\Delta x^2} = IP ,$$

la dérivée de $\operatorname{sinc}(x)$ vaut donc 0 en $x = 0$.

La Formule de Taylor d'ordre 2 a de nombreuses autres applications. Nous allons en voir quelques unes.

15.2 Application à l'étude des extrema

Complétons les résultats dejà vus concernant la recherche des extrema locaux.

Théorème 43 (Détection d'un extremum)**.**
Soit f deux fois continûment dérivable dans un voisinage d'un réel x_0. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ (respectivement $f''(x_0) < 0$), alors f admet en x_0 un minimum local (respectivement un maximum local).

Démonstration. Envisageons le cas où $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$. En raison de la continuité de f'' en x_0, il existe un voisinage V de x_0 dans lequel $f''(x) > 0$. D'après la Formule de Taylor pour tout $x \in V$ il existe c entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c) .$$

Forcément c est dans V et donc $f''(c) > 0$, par conséquent $f(x) > f(x_0)$. La fonction f admet donc en x_0 un minimum local. □

15.3 Fonctions convexes. Concavité

Soient f une fonction définie au moins dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{G}$ le graphe de f.

Définition. *La **concavité** de $\mathcal{G}$ est **tournée vers le haut** dans I lorsque pour tous x_1, x_2 dans I, le segment de droite joignant les points $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)$ est situé au dessus de $\mathcal{G}$ pour toute abscisse se trouvant entre x_1 et x_2, alors on dit aussi que f est **convexe** dans I.*

*La **concavité** de $\mathcal{G}$ est tournée **vers le bas** dans I lorsque pour tous x_1, x_2 dans I le segment de droite joignant les points $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)$ est situé en dessous de $\mathcal{G}$ pour toute abscisse se trouvant entre x_1 et x_2, alors on dit aussi que f est **concave** dans I.*

Cette situation est illustrée sur la figure 15.1. On sait que les équations paramétriques du segment joignant $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ sont

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ y & = & \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \end{array} \right. \qquad \text{où } \lambda \in [0,1] ;$$

par conséquent

f est convexe dans I si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) .$$

Théorème 44. *Si $f'(x)$ est croissante (resp. décroissante) dans I, f est convexe (resp. concave) dans I.*

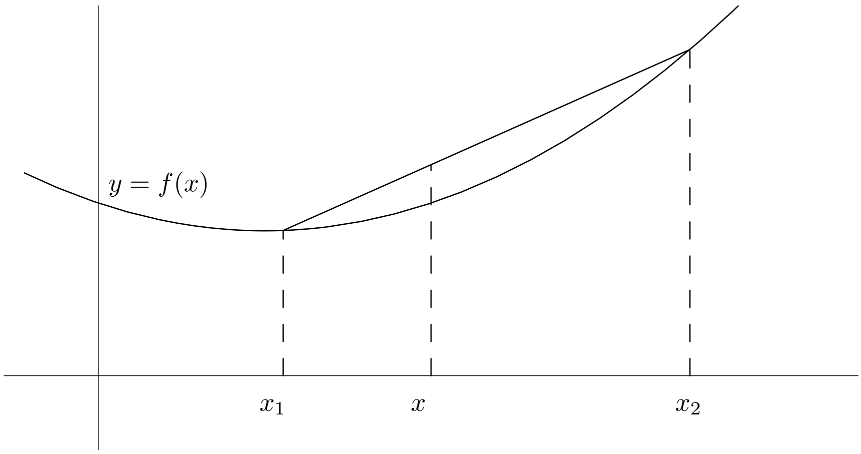


FIGURE 15.1: Concavité tournée vers le haut

Démonstration. Supposons f' croissante dans I. Soient $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ et $\lambda \in]0,1[$. Posons $x := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Il existe c_1, c_2 tels que $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$ et tels que

$$\begin{array}{rcccl} f(x_1) & = & f(x) + (x_1 - x)f'(c_1) & = & f(x) - (1-\lambda)(x_2 - x_1)f'(c_1)\ , \\ f(x_2) & = & f(x) + (x_2 - x)f'(c_2) & = & f(x) + \lambda(x_2 - x_1)f'(c_2)\ . \end{array}$$

Il s'ensuit

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f(x) + \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)(f'(c_2) - f'(c_1))\ .$$

f' étant croissante, l'expression $\lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)(f'(c_2) - f'(c_1))$ est ≥ 0 d'où

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geq f(x)\ .$$

□

Il s'ensuit :

Soit f dérivable deux fois dans un intervalle I . Si $f''(x)$ est ≥ 0 (resp. ≤ 0) dans I , alors f est convexe (resp. concave) dans I .

La propriété ci-dessus donne un moyen pratique pour étudier la concavité d'un graphe : il suffit d'étudier le signe de $f''(x)$.

Définition. *Le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{G}$ si f est dérivable en a et s'il existe des réels u, v tels que $\mathcal{G}$ ait des concavités de sens opposé dans les intervalles $[u,a]$ et $[a,v]$.*

Pour déterminer les points d'inflexion il faut donc déterminer les abscisses où $f''(x)$ change de signe.

Utilisons la Formule de Taylor d'ordre 2 pour comparer la position du graphe et de la tangente.

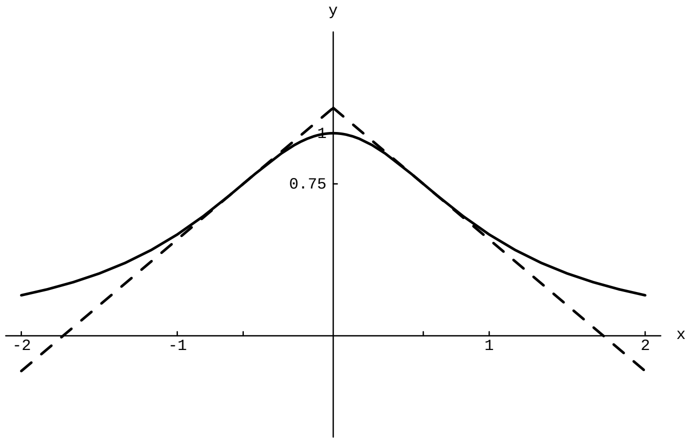


FIGURE 15.2: graphe de $\dfrac{1}{1+x^2}$

Théorème 45. *Si f est dérivable deux fois dans l'intervalle I et si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) dans I , alors pour tout $x_0 \in I$ la tangente à $\mathcal{G}$ au point $(x_0, f(x_0))$ se trouve en dessous (resp. au dessus) de $\mathcal{G}$ en toute abscisse de I .*

Démonstration. Envisageons le cas où $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Soit $x_0 \in I$ et notons T_0 la tangente en $(x_0, f(x_0))$, l'équation de T_0 s'écrit :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad . \tag{15.6}$$

Soit $x \in I$. D'après la Formule de Taylor il existe c entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c) \quad . \tag{15.7}$$

Comparons les ordonnées des points de T_0 et de $\mathcal{G}$ de même abscisse x en utilisant les équations (15.6) et (15.7) : puisque $f''(c) \geq 0$, on constate que l'ordonnée du point de $\mathcal{G}$ est supérieure ou égale à celle du point de T_0. □

Exemple 15.1. *Etudions la fonction f définie par $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$.*

Solution. La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. On a

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \ .$$

D'où $f'(x) > 0$ pour $x < 0$, $f'(x) < 0$ pour $x > 0$ et $f'(0) = 0$. $f(x)$ est donc strictement croissante dans $]-\infty, 0]$, strictement décroissante dans $[0, +\infty[$ et admet un maximum local en 0. Ce maximum local donne lieu au maximum de f dans $\mathbb{R}$ à savoir $f(0) = 1$. On a

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3} \ .$$

L'étude du signe de f'' donne :

x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
concavité du graphe	$\cup$		$\cap$		$\cup$

Les points $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$ sont donc des points d'inflexion du graphe de f.
Le graphe de f apparaît sur la figure 15.2.

15.4 Méthode de Newton-Raphson

Supposons que f prenne en a et b des signes opposés. Si f est continue dans $[a, b]$, alors f s'annule au moins une fois en un réel c compris entre a et b. Comment trouver ce réel c ?

Une première méthode consiste à partager successivement l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales et à conserver les extrémités où f prend des valeurs de signes opposés. Ainsi si $f(a) < 0 < f(b)$ et si c_1 est le milieu de $[a, b]$ et si $f(c_1) > 0$, on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $a_1 = a_0$, $b_1 = c_1$, ensuite si c_2 est le milieu de $[a_1, b_1]$ et si, par exemple, $f(c_2) < 0$, on pose $a_2 = c_2$, $b_2 = b_1$, et ainsi de suite .... On peut alors montrer que les suites a_n et b_n tendent toutes vers un même réel c vérifiant $f(c) = 0$. Mais cette méthode est peu rapide : les termes des suites a_n, b_n se rapprochent lentement de la solution c cherchée. Aussi en général on applique d'autres méthodes et parmi celles-ci une des plus utilisées est la **Méthode de Newton-Raphson**. Expliquons cette méthode.

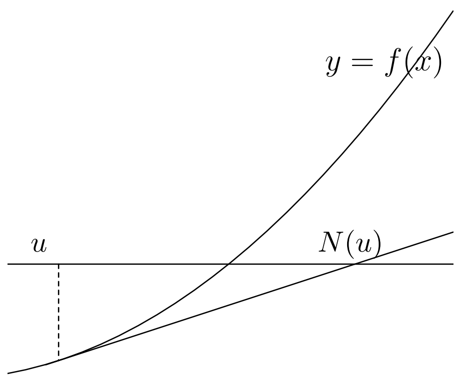


FIGURE 15.3: construction de $NR(u)$ lorsque $u < c$ et lorsque $u > c$

Envisageons la situation suivante

1. *$f(x)$ est 2 fois continûment dérivable dans $[a, b]$,*

2. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés et sont non nuls,

3. $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles dans $[a,b]$.

Vu le Théorème des valeurs intermédiaires :
— appliquée à f, la fonction f s'annule dans $[a,b]$,
— appliquée à f' et à f'', les dérivées f' et f'' sont de signe constant dans $[a,b]$.
Alors $f(x)$ étant strictement monotone dans $[a,b]$, la fonction f s'annule donc une seule fois dans $[a,b]$, notons c le réel situé dans $]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

Si u est dans $[a,b]$, menons par le point du graphe d'abscisse u la tangente à ce graphe ; puisque $f'(u)\neq 0$ cette tangente ne peut être horizontale et coupe donc l'axe des x, notons $NR(u)$ l'abscisse de ce point d'intersection (voir figure 15.3). Puisque l'équation de la tangente est

$$y - f(u) = f'(u)(x-u) ,$$

on a

$$\boxed{NR(u) = u - \frac{f(u)}{f'(u)}\ .}$$

La méthode de Newton-Raphson consiste à construire une suite x_n par récurrence : on choisit x_0 dans $[a,b]$ et on pose

$$\boxed{x_{n+1} := NR(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}\ . \tag{15.8}$$

Cette construction est illustrée sur la figure 15.4. Nous allons montrer que, moyennant des précautions simples concernant le choix de x_0, cette suite converge vers le nombre c cherché. De plus comme on le devine sur un dessin cette convergence est très rapide.

Etudions la suite x_n. Plusieurs cas peuvent se présenter suivant les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$. Par exemple envisageons le cas

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ et } f'(x) > 0\ ,\ f''(x) > 0 \text{ dans } [a,b]\ .$$

Alors, dans $[a,b]$, la concavité du graphe est tournée vers le haut.

Par un point du graphe d'abscisse u dans $[a,b]$, menons la tangente au graphe, le graphe se trouve donc au-dessus de la tangente. Dès lors, comme on le remarque en observant le graphe et la tangente :
— $c < NR(u) < u$ si $u > c$,
— $c < NR(u)$ si $u < c$,
— $NR(u) = u$ si $u = c$.
Dans le premier cas $NR(u)$ est encore dans $[a,b]$ et on a bien l'impression que $NR(u)$ nous a permis de nous rapprocher de façon significative de c. Dans le second cas $NR(u)$ est passé de l'autre côté de c mais pourrait dans certains cas avoir dépassé b et être sorti de $[a,b]$.

Appliquons cela à la suite x_n. Il faut s'assurer que tous les termes x_n sont dans $[a,b]$, cela est certainement le cas si $x_0 > c$; mais si $a < x_0 < c$, il faut vérifier que

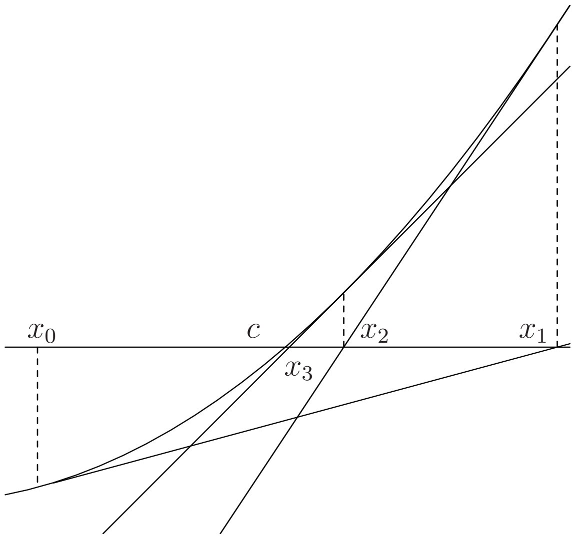


FIGURE 15.4: construction de la suite x_n

$x_1 \leq b$. Supposons cette condition vérifiée (si ce n'etait pas le cas, il faudrait changer x_0). On a

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots \geq c \, .$$

Dès lors, d'après le Critère des suites monotones, la suite x_n converge vers une limite réelle w et $a < c \leq w < x_1 \leq b$, le nombre w est donc dans $[a, b]$. Pour tout naturel n la formule (15.8) est vérifiée, il en est donc de même pour tout hypernaturel n. Prenons pour k un hypernaturel infiniment grand, on a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \, , \tag{15.9}$$

on a aussi

$$w \approx x_k \approx x_{k+1} \, .$$

Il s'ensuit

$$f(x_k) \approx f(w) \quad \text{et} \quad f'(x_k) \approx f'(w)$$

et aussi ,vu (15.9),

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \approx 0 \, .$$

$f'(x_k)$ est appréciable et donc $f(x_k)$ est infiniment petit. Il s'ensuit $f(w) = 0$ et donc $w = c$. En conclusion :

si le premier terme x_0 est choisi dans $[a, b]$ tel que x_1 soit aussi dans $[a, b]$, la suite x_k construite grâce à (15.9), converge vers la solution c de $f(x) = 0$.

Montrons pourquoi cette méthode est très rapide. Appliquons la Formule de Taylor d'ordre deux entre x_k et c, nous avons :

$$0 = f(c) = f(x_k) + (c - x_k)f'(x_k) + \frac{(c - x_k)^2}{2} f''(u)$$

où u se trouve entre x_k et c. En divisant par $f'(x_k)$, on a

$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x_k - c = \frac{(c - x_k)^2}{2} \frac{f''(u)}{f'(c_k)}$$

c'est-à-dire

$$x_{k+1} - c = \frac{(x_k - c)^2}{2} \frac{f''(u)}{f'(c_k)}$$

d'où

$$\frac{x_{k+1} - c}{(x_k - c)^2} = \frac{f''(u)}{2\, f'(c_k)} \; .$$

Si on prend k infiniment grand, on a $x_k \approx x_{k+1} \approx c \approx u$, d'où

$$\frac{f''(u)}{2\, f'(c_k)} \approx \frac{f''(c)}{f'(c)} = AP \; ,$$

il s'ensuit

$$x_{k+1} - c = O((x_k - c)^2) \; .$$

Par conséquent, *en passant de x_k à x_{k+1}, l'ordre de grandeur de l'erreur diminue très fortement puisqu'il est élevé au carré.*

Chapitre 16

Etudes de fonctions

Nous avons déjà étudié la croissance, la décroissance ainsi que la concavité. Nous allons compléter cela afin d'avoir tous les éléments pour faire une étude complète d'une fonction.

16.1 Asymptotes

Considérons le graphe $\mathcal{G}$ d'une fonction f. Par définition,

*une droite non verticale D est **asymptote oblique** à $\mathcal{G}$ lorsque pour tout x ig > 0 (ou pour tout x ig < 0), le point du graphe d'abscisse x est infiniment proche d'un point de D d'abscisse x ; dans le premier cas on parle d'asymptote oblique du côté $+\infty$, dans le second d'asymptote oblique du côté $-\infty$.*

Soit

$$D \,:\, y = mx + p \,.$$

Envisageons le cas "du côté $+\infty$". Alors D est asymptote ssi pour tout x infiniment grand > 0, on a

$$mx + p \approx f(x) \tag{16.1}$$

ou ce qui est équivalent $p \approx f(x) - mx$, c'est-à-dire

$$\boxed{p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \,.} \tag{16.2}$$

Cherchons maintenant m : dans (16.1), divisons par x, la relation $\approx$ est maintenue et on obtient $m + \frac{p}{x} \approx \frac{f(x)}{x}$ d'où $m \approx \frac{f(x)}{x}$ et donc

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \,.} \tag{16.3}$$

Par conséquent la droite D est asymptote oblique du côté $+\infty$ lorsque les deux limites (16.2),(16.3) existent et sont des réels, alors on commence bien entendu par chercher m au moyen de (16.3) et ensuite p au moyen de (16.2). Pour le "côté $-\infty$", il suffit ci-dessus de prendre des x infiniment grands < 0.

Une **asymptote horizontale** est un cas particulier des asymptotes obliques : il s'agit d'une asymptote oblique qui est une droite horizontale. Le graphe $\mathcal{G}$ admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est un réel, auquel cas, en posant $a = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, l'équation de l'asymptote horizontale est $y = a$.

Remarquons qu'on ne peut avoir au plus en $+\infty$ qu'une seule asymptote oblique, de même bien entendu en $-\infty$.

Envisageons maintenant le cas des **asymptotes verticales**.
Supposons $\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$. Alors, pour tout $x \approx a$ et $x > a$, on a $f(x)$ ig et le point du graphe d'abscisse x a une ordonnée infiniment grande et est infiniment proche du point de la droite de même ordonnée, on dit dès lors que la droite $x = a$ est asymptote verticale au graphe. Il en est bien entendu de même dans les autres cas suivant

$$\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a-} f(x) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty\ .$$

Exemples

1. Soit $f(x) := \dfrac{x^2}{2(x-2)}$. Nous avons

   $$\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty\ ,$$

   d'où la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale au graphe de f. On a aussi

   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x) = 1$$

   d'où la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Les droites d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ sont des asymptotes horizontales au graphe de la fonction $\operatorname{arctg} x$ respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.
3. L'axe des x est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ au graphe de la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$, remarquons que dans cet exemple le graphe passe constamment d'un côté à l'autre de l'asymptote horizontale.

16.2 Transformations géométriques simples appliquées à un graphe

On peut parfois déduire un graphe d'un autre graphe en appliquant à ce dernier des opérations géométriques simples. Envisageons ici quelques transformations élémentaires souvent utiles dans l'étude des fonctions et de leur graphe. On peut évidemment combiner ces transformations entre elles. *Ces transformations élémentaires sont très utiles dans l'étude de nombreuses fonctions.*

Désignons par $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ les vecteurs unitaires ayant même direction que l'axe $\boldsymbol{o}x$, respectivement l'axe $\boldsymbol{o}y$. Ici a, b sont des réels et $a > 0$.

Translation de direction $\boldsymbol{o}x$: le graphe de $x \longmapsto f(x+b)$ s'obtient en appliquant au graphe de f la translation $-b\vec{e_1}$.

Translation de la direction de $\boldsymbol{o}y$: le graphe de $x \longmapsto f(x)+b$ s'obtient en appliquant au graphe de f la translation $b\vec{e_2}$.

Affinité dans la direction $\boldsymbol{o}x$: Le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ s'obtient en multipliant les abscisses des points du graphe par $1/a$. Une telle transformation est appelée une affinité de facteur $1/a$ dans la direction $\boldsymbol{o}x$.

Affinité dans la direction $\boldsymbol{o}y$: Le graphe de $x \longmapsto af(x)$ s'obtient en multipliant les ordonnées des points du graphe par a. Une telle transformation est appelée une affinité de facteur a dans la direction de $\boldsymbol{o}y$.

Symétrie par rapport à $\boldsymbol{o}x$ ou $\boldsymbol{o}y$: le graphe de $x \longmapsto f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à $\boldsymbol{o}y$; le graphe de $x \longmapsto -f(x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à $\boldsymbol{o}x$.

Par exemple, considérons une base réelle $\lambda > 1$ et traçons les graphes de $x \mapsto \lambda^x$ et de $x \mapsto \log_\lambda x$. Puisque

$$\lambda^x = e^{x \ln \lambda} ,$$

le graphe de $x \mapsto \lambda^x$ s'obtient en appliquant au graphe de e^x une affinité dans la direction de $\boldsymbol{o}x$ de facteur $1/\ln\lambda$. De même, puisque

$$\log_\lambda x = \frac{\ln x}{\ln \lambda}$$

le graphe de $x \mapsto \log_\lambda x$ s'obtient en appliquant au graphe de $\ln x$ une affinité parallèle à $\boldsymbol{o}y$ de facteur $1/\ln\lambda$

Exemple 16.1. *Soient a et b des réels quelconques. Etudions le graphe de*

$$f_{a,b} \ : \ x \longmapsto a\cos x + b\sin x .$$

Solution. Utilisons les coordonnées polaires ρ, θ du point (b,a) en prenant par exemple θ dans $]-\pi,\pi]$. On a

$$b = \rho\cos\theta \ , \ a = \rho\sin\theta .$$

Puisque a et b sont des réels quelconques, ρ et θ sont des réels quelconques pris respectivement dans $[0,+\infty[$ et $]-\pi,\pi]$. On a :

$$f_{a,b}(x) = \rho\sin\theta\cos x + \rho\cos\theta\sin x = \rho\sin(x+\theta) .$$

Pour tracer le graphe de $f_{a,b}$ on doit appliquer au graphe de sin une translation $-\theta\vec{e_1}$ et une affinité de facteur ρ dans la direction de $\boldsymbol{o}y$.

16.3 Schéma d'étude de fonction

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour donner un schéma d'étude d'une fonction :

1. Déterminer si l'étude ne peut se simplifier grâce aux transformations géométriques simples comme celles envisagées à la page 191 . Déterminer si la fonction est paire, impaire, périodique. Suite à cela, simplifier ou limiter en conséquence l'étude de f .
2. Chercher l'ensemble où la fonction est définie, continue, dérivable.
3. Chercher les limites, éventuellement limites à droite, limites à gauche, aux extrémités des intervalles ouverts où f est continue. On en déduit les éventuelles asymptotes verticales ou horizontales. S'il y a lieu, chercher les asymptotes obliques.
4. Chercher f' et étudier son signe. On en déduit où f est croissante, décroissante, les minima et maxima locaux éventuels.
5. Chercher f'' et étudier son signe (si cela est possible). On en déduit le sens de la concavité et les points d'inflexion éventuels. Chercher la tangente en ces points d'inflexion.
6. Chercher les intersections éventuelles avec les axes et d'autres points ou éléments remarquables. Déterminer la position du graphe par rapport aux asymptotes obliques éventuelles pour $|x|$ suffisamment grand.
7. Choisir judicieusement les unités sur les axes. Tracer au mieux le graphe ainsi que les asymptotes éventuelles et les tangentes aux points d'inflexion. Dans certains cas on pourrait être amené à partager le graphe en plusieurs parties et à tracer celles-ci séparément en choisissant des unités de mesure différentes pour ces diverses portions de graphe.

Ce plan n'est qu'un guide général, dans de nombreux cas une étude complète n'est pas nécessaire pour le problème envisagé.

Voici un exemple complet d'étude d'une fonction.

Exemple 16.2. *Etudions la fonction f définie par*

$$f(x) := \sqrt{x^2(x+1)}\ .$$

Solution. Remarquons d'abord que $f(x) = |x|\sqrt{1+x}$.

1. f est définie et continue dans $[-1,+\infty[$, elle est dérivable dans $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
2. La fonction f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.
3. f étant continue dans $[-1,+\infty[$ et définie nulle part ailleurs il n'y a pas d'asymptote verticale.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ ,$$
il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty\ ,$$
il n'y a donc pas d'asymptote oblique.

4. f' existe dans $]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

L'étude du signe donne :

x		-1		$\frac{-2}{3}$		0	
f'	$\backslash$	$\backslash$	$+$	0	$-$	$\backslash$	$+$
f	$\backslash$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction est donc strictement croissante dans chacun des intervalles $]-1,-2/3[$, $]0,+\infty[$, elle est strictement décroissante dans $]-2/3,0[$, elle admet un maximum local en $-2/3$ et un minimum local en 0. Le maximum local vaut $f(-2/3) = 2\sqrt{3}/9$ et le minimum local vaut $f(0) = 0$.

5. f'' existe dans $]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+4}{4\sqrt{(x+1)^3}} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{3x+4}{4\sqrt{(x+1)^3}} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

L'étude du signe donne :

x		-1		0	
f''	$\backslash$	$\backslash$	$-$	$\backslash$	$+$
f	$\backslash$	0	$\cap$	0	$\cup$

La concavité est tournée vers le bas dans $]-1,0[$ et tournée vers le haut dans $]0,+\infty[$, le point $(0,0)$ n'est pas un point d'inflexion car f n'est pas dérivable en 0.

6. Les points d'intersection avec les axes sont $(-1,0)$ et $(0,0)$.

La fonction $f(x)$ n'étant ni dérivable en 0 ni en -1, essayons d'en savoir plus concernant l'existence d'une tangente ou demi-tangente aux points correspondants et pour cela observons le graphe dans l'oculaire du microscope de grossissement $1/\Delta$. Soit Δ un infiniment petit > 0.

Pointons d'abord le microscope vers l'origine. Soit Δx un infiniment petit qui soit $O(\Delta)$. Si $\Delta x > 0$, on a

$$f(\Delta x) = \Delta x\sqrt{1+\Delta x} \approx_{\Delta} \Delta x \ ,$$

d'où le point du graphe d'abscisse Δx est $\approx_\Delta$ du point $(\Delta x, \Delta x)$ qui est un point de la droite $y = x$. Du côté des abscisses positives le graphe est donc observé comme la demi-droite $y = x$, cette demi-droite peut donc être appelée une *demi-tangente à droite* au graphe à l'origine. Soit maintenant $\Delta x < 0$. Alors

$$f(\Delta x) = -\Delta x\sqrt{1+\Delta x} \approx_\Delta -\Delta x \ ,$$

d'où le point du graphe d'abscisse Δx est $\approx_\Delta$ du point $(\Delta x, -\Delta x)$ qui est un point de la droite $y = -x$. Du côté des abscisses négatives le graphe est donc observé comme la demi-droite $y = -x$, cette demi-droite peut donc être appelée une *demi-tangente à gauche* au graphe à l'origine.

Pointons maintenant le microscope vers $(-1, 0)$. Considérons Δx qui soit $O(\Delta)$ et > 0. Alors $f(-1+\Delta x) = (1-\Delta x)\sqrt{\Delta x}$ et $f(-1+\Delta x)$ n'est pas $O(\Delta)$, le point du graphe d'abscisse $-1+\Delta x$ n'est donc pas observé dans l'oculaire. Envisageons donc plutôt une variation Δy de l'ordonnée qui soit $O(\Delta)$ et > 0 et considérons le point du graphe $(-1+\Delta x, \Delta y)$. Alors $\Delta y = (1-\Delta x)\sqrt{\Delta x}$, il s'ensuit $(\Delta y)^2 = (1-\Delta x)^2 \Delta x$ d'où

$$\mathrm{st}(\frac{\Delta x}{\Delta}) = \mathrm{st}(\frac{(\Delta y)^2}{\Delta(1-\Delta x)^2}) = 0 \ .$$

Δx est donc $o(\Delta)$ et le point du graphe $(-1+\Delta x, \Delta y)$ est donc $\approx_\Delta$ du point $(-1, \Delta y)$ qui est un point de la verticale $x = -1$. Le graphe est donc observé comme la demi-droite

$$\begin{cases} x = -1 \\ y > 0 \end{cases}$$

cette demi-droite peut donc être appelée une *demi-tangente* en $(-1, 0)$.

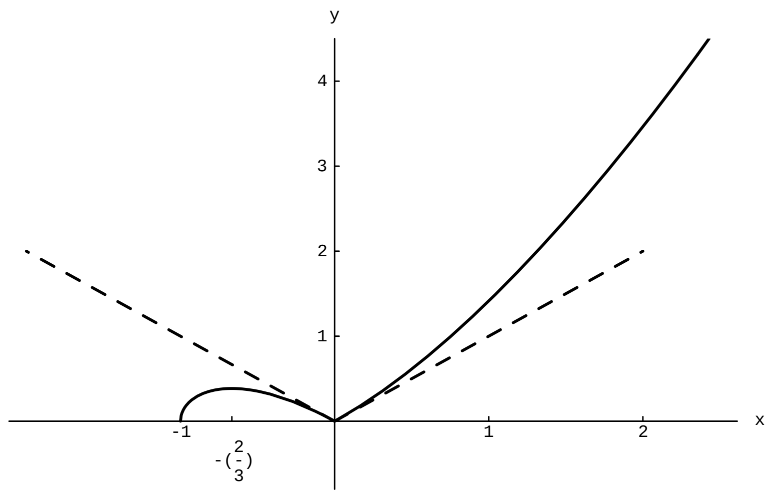


FIGURE 16.1: Graphe de $\sqrt{x^2(x+1)}$

7. Tracé du graphe : voir la figure 16.1.

16.4 Règle de L'Hospital

Nous avons déjà vu un certain nombre d'"indétermination de la forme $\frac{IP}{IP}$ ou $\frac{IG}{IG}$ que nous avons pu lever. Signalons une règle pratique qui permet de lever aisément de nombreuses indéterminations de cette forme : la **Règle de L'Hospital**

Théorème 46 (Règle de L'Hospital)**.** *Soit a un réel. Si*

1. $\lim_{x\to a} f(x)$ *et* $\lim_{x\to a} g(x)$ *sont toutes nulles ou toutes deux infinies,*

2. f, g *sont dérivables dans* $]a, a+h]$ *(h réel > 0),*

3. $g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in]a, a+h]$ *,*

4. $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe (éventuellement infinie),*

alors

$$\boxed{\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ .}$$

On trouvera la démonstration de ce résultat par exemple dans [16].

Exemple 16.3. *Recherchons* $\lim_{x\to 0} \frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

Solution. Nous avons

- $\lim\limits_{x\to 0}(x - \arcsin x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin^3 x = 0\,,$
- $(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x \neq 0$ dans $]-1, 0[\cup]0, 1[\,.$
- $\dfrac{(x-\arcsin x)'}{(\sin^3 x)'} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3\sqrt{1-x^2}\cos x \sin^2 x}\ .$

Mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-\arcsin x)'}{(\sin^3 x)'}$ présente de nouveau une indétermination de la forme '$\frac{0}{0}$'! Pour calculer cette dernière limite, appliquons encore la Règle de L'Hospital à la fraction

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x}\ ;$$

nous avons :

- $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1-x^2}-1) = \lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x = 0\,,$
- $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x \neq 0$ dans $]-1, 0[\cup]0, 1[\,,$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1-x^2}-1)'}{(\sin^2 x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{2\sqrt{1-x^2}\sin x \cos x} = -\dfrac{1}{2}\,.$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-\arcsin x)'}{(\sin^3 x)'} = -\frac{1}{6}\ .$$

Nous pouvons donc appliquer la Règle de L'Hospital à la limite initiale et on obtient ainsi
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{6} \, .$$
Remarquons :
- la Règle de L'Hospital doit parfois être appliquée plusieurs fois,
- on a toujours intérêt à l'appliquer à la fraction la plus simple possible et donc à enlever de celle-ci les facteurs ne contribuant pas à l'indétermination.

16.5 Exercices

1. Etudiez les fonctions définies ci-dessous et tracez leur graphe.

   $f_1(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\qquad$ $f_2(x) := \arcsin(2x+1)$

   $f_3(x) := \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x)$ $\qquad$ $f_4(x) := \frac{x^2}{x+1}$

   $f_5(x) := \frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}-1}$ $\qquad$ $f_6(x) := x^2 e^{-x}$

   $f_7(x) := e^x \sin(2x)$ $\qquad$ $f_8(x) := x\ln(x)$

   $f_9(x) := e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $f_{10}(x) := \ln(\ln x)$

   $f_{11}(x) := x\, e^{\frac{1}{x-2}}$ $\qquad$ $f_{12}(x) := e^{\frac{4x-1}{4x^2}}$

2. Soit θ un réel > 0 . Etudiez la famille de fonction
$$f_\theta \;:\; x \longmapsto e^{-x}\sin(\theta x) \, .$$
   A partir de là esquissez le graphe de fonction
$$x \longmapsto Ae^{-kx}\sin(\theta x + \varphi) \, .$$
   sachant que A, k, θ sont > 0 et $-\pi < \varphi \leq \pi$.

3. Soit λ un paramètre réel > 0. Etudiez f_λ définie par
$$f_\lambda(x) := \frac{e^{\lambda x}}{x^2+1} \, .$$
   N'étudiez pas la concavité.

4. Soit λ un paramètre réel $\neq 0$. Etudiez les fonctions f_λ définies par
$$f_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda - e^x} \, .$$

Chapitre 17

Quelques fonctions importantes

Nous allons compléter notre liste de *fonctions élémentaires*. Nous allons étudier les *fonctions hyperboliques*, la *fonction en cloche* de Gauss et la *fonction d'erreur*. Ensuite nous verrons comment étudier des fonctions à valeurs complexes et nous pourrons ensuite voir l'*exponentielle complexe*.

17.1 Fonctions hyperboliques

Définition. *Le* ***cosinus hyperbolique*** *de* x *, noté* $\mathbf{ch}\,\boldsymbol{x}$ *ou* $\mathbf{cosh}\,\boldsymbol{x}$ *, le* ***sinus hyperbolique*** *de* x *noté* $\mathbf{sh}\,\boldsymbol{x}$ *ou* $\mathbf{sinh}\,\boldsymbol{x}$ *, la* ***tangente hyperbolique*** *de* x *, notée* $\mathbf{th}\,\boldsymbol{x}$ *ou* $\mathbf{tanh}\,\boldsymbol{x}$ *et la* ***cotangente hyperbolique*** *de* x *notée* $\mathbf{coth}\,\boldsymbol{x}$ *sont définis par :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & , & \operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \;, \\ \operatorname{th} x := \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} & , & \operatorname{coth} x := \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \;. \end{array}}$$

Les résultats suivants se déduisent aisément (à faire en guise d'exercices) :

Proposition 47. *1.* $\operatorname{ch} x$ *est pair et* $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$ *sont impairs ;*

2. $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \;, \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ *;*

3. $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$ *;*

4. $\operatorname{ch} x \geq 1$ *.*

5. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ *,* $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ *et* $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ *.*

6. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$ *.*

7. $\operatorname{ch} x$*,* $\operatorname{sh} x$*,* $\operatorname{th} x$ *sont indéfiniment dérivables dans* $\mathbb{R}$*,* $\operatorname{coth} x$ *est indéfiniment continûment dérivable dans* $]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$ *et*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x \;, & \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x \;, \\ \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \;, & \operatorname{coth}'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \;. \end{array}}$$

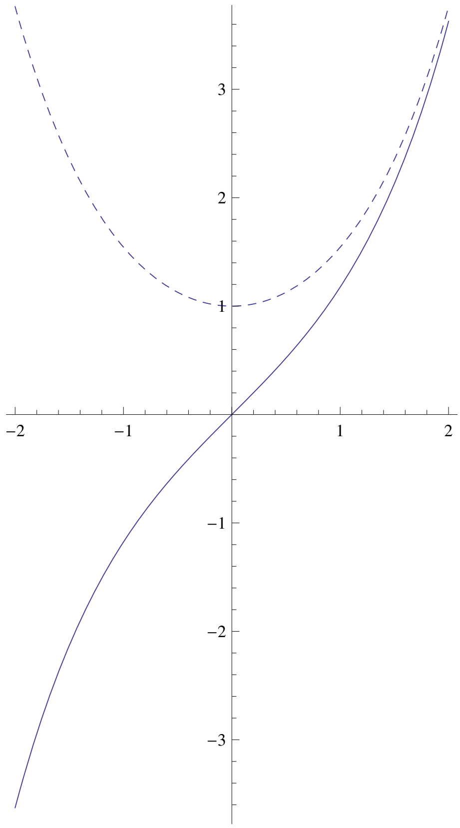


FIGURE 17.1: Graphe de ch(x) (trait pointillé), graphe de sh x (trait continu)

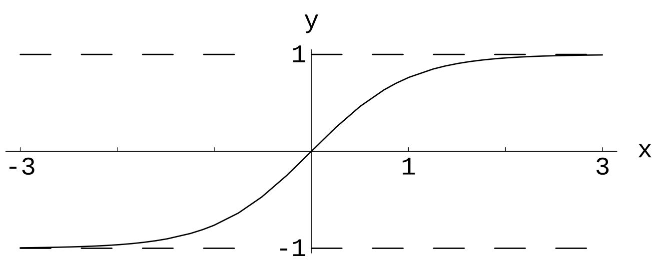


FIGURE 17.2: Graphe de $th(x)$

8. $\operatorname{sh} x$ *et* $\operatorname{th} x$ *sont strictement croissantes dans* $\mathbb{R}$ *et* $\operatorname{sh} 0 = \operatorname{th} 0 = 0$. $\operatorname{ch} x$ *est strictement décroissante dans* $]-\infty, 0]$, *strictement croissante dans* $[0, +\infty[$ *et* $\operatorname{ch} 0 = 1$.

9. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ *et* $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$ *d'où il découle* $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ *et* $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Ces différents résultats permettent de tracer les graphes des fonctions hyperboliques comme sur la figure 17.1.

La table 17.1 reprend les propriétés des fonctions hyperboliques et les comparant aux propriétés analogues des fonctions trigonométriques

Pourquoi utilise-t-on ici l'adjectif *hyperbolique* ? Voici une raison Les équations paramétriques de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

s'écrivent

$$\begin{cases} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi] .$$

Considérons maintenant l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{17.1}$$

Soit $\mathcal{H}$ la branche de cette hyperbole correspondant à $x > a$. Les ordonnées de $\mathcal{H}$ varient dans $\mathbb{R}$, on peut donc poser $y := b \operatorname{sh} t$ où t varie dans $\mathbb{R}$ tout entier. De (17.1), il vient

$$x = a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(t)} = a \operatorname{ch} t .$$

Les équations paramétriques de la branche d'hyperbole $\mathcal{H}$ sont donc

$$\begin{cases} x &= a \operatorname{ch} t \\ y &= b \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Les cosinus et sinus hyperboliques permettent donc de paramétrer les hyperboles et cela de la même façon que les cosinus et sinus trigonométriques permettent de paramétrer les ellipses.

17.2 Les fonctions hyperboliques réciproques

La fonction sh est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et pour ensemble de valeurs $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction ch restreinte à l'intervalle $[0, +\infty[$ est strictement croissante et l'image de $[0, +\infty[$ est $[1, +\infty[$. On peut donc considérer les fonctions réciproques de ces deux fonctions par définition :

— **arcsh** est la fonction réciproque de sh et est définie dans $\mathbb{R}$,
— **arcch** est la fonction réciproque de la restriction de ch à $[0, +\infty[$ et est donc définie dans . $[1, +\infty[$.

$\cos x$, $\sin x$	$\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$
$\cos x := \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin x := \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ $e^{ix} = \cos x + i\,\sin x$	$\operatorname{ch} x := \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\operatorname{sh} x := \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ $e^{x} = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$
$\cos'(x) = -\sin x$, $\sin'(x) = \cos x$	$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x$
$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$	$(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$	$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$	$1 + \operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x$ $1 - \operatorname{ch} 2x = -2\operatorname{sh}^2 x$

TABLE 17.1: **Comparaison entre cosinus et sinus trigonométriques et hyperboliques**

En raisonnant comme on l'a fait pour chercher la dérivée de $\arcsin x$ (page 77) on prouve :

$$\boxed{\operatorname{arcsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \operatorname{arcch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ dans }]1,+\infty[\ .}$$

Pour tracer les graphes de $\operatorname{arcsh} x$ et $\operatorname{arcch} x$, il suffit de prendre les symétriques par rapport à la première bissectrice de $\operatorname{sh} x$ et de $\operatorname{ch} x$ (pour autant que ceux-ci soient tracés dans des axes cartésiens), on obtient ainsi les graphes apparaissant sur les figures 17.3, 17.4.

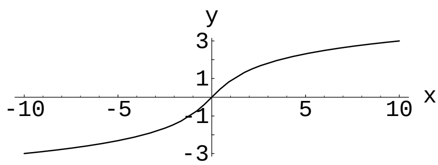


FIGURE 17.3: Graphe de $arcsh(x)$

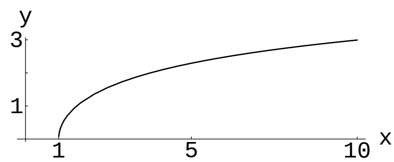


FIGURE 17.4: Graphe de $arcch(x)$

Proposition 48.

$$\boxed{\operatorname{arcsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \ \textit{dans } \mathbb{R} \ \ \textit{et} \ \ \operatorname{arcch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \ \textit{dans } [1,+\infty[} \ . \tag{17.2}$$

Démonstration. Envisageons le cas de $\operatorname{arcsh} x$. Posons $f(x) := \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Dans $\mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsh}'(x)\ ;$$

il existe donc une constante C telle que $f(x) = \operatorname{arcsh} x + C$ dans $\mathbb{R}$. En particulier

$$f(0) = \operatorname{arcch} 0 + C\ ,$$

d'où $C = 0$. Ainsi $f(x) = \operatorname{arcsh} x$ dans $\mathbb{R}$. □

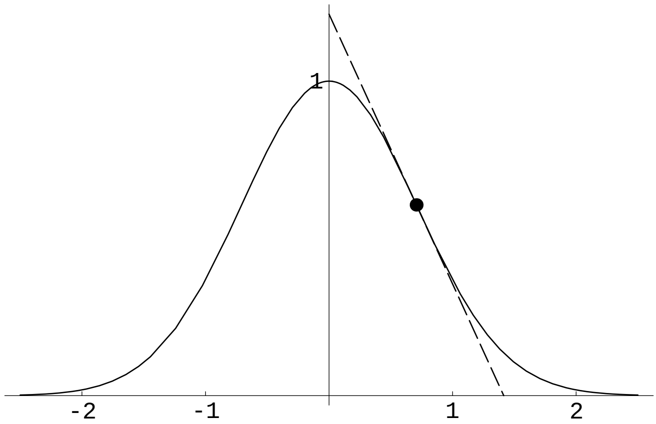


FIGURE 17.5: Graphe de $\exp(-x^2)$ et tangente en un point d'inflexion

17.3 Courbe de Gauss et Fonction d'erreur

Soit λ une constante réelle > 0. Notons g_λ la fonction

$$g_\lambda \;:\; x \longmapsto e^{-\lambda x^2} \;.$$

Cette fonction est très importante, en effet elle est à la base de la définition de la distribution de probabilité la plus utilisée, à savoir la *Distribution normale* ; en effet la *Distribution normale réduite*, c'est-à-dire la distribution normale de moyenne 0 et d'écart type 1 , a comme densité de probabilité la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

Etudions la fonction g_λ. Cette fonction est paire. Dans $\mathbb{R}$ on a

$$g'_\lambda(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2} \;,$$

La fonction g_λ admet donc un maximum en $x = 0$ et ce maximum vaut 1 , elle est strictement croissante dans $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante dans $[0, +\infty[$. On a aussi

$$g''_\lambda(x) = 2\lambda(2\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2} \;,$$

Le graphe de g_λ admet donc deux points d'inflexion, à savoir $(-1/\sqrt{2\lambda}, 1/\sqrt{e})$ et $(1/\sqrt{2\lambda}, 1/\sqrt{e})$, la concavité étant tournée vers le haut dans $]-\infty, -1/\sqrt{2\lambda}]$ et $[1/\sqrt{2\lambda}, +\infty[$, tournée vers le bas dans $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Si H est un infiniment grand, le nombre $e^{-\lambda H^2}$ est infiniment petit et l'axe des x est donc une asymptote horizontale aussi bien du côté $+\infty$ que du côté $-\infty$.

Dès lors le graphe de g_λ a l'allure d'une "*cloche*" et s'appelle une **courbe de Gauss**. Sur la figure 17.5, on a tracé cette courbe en prenant $\lambda = 1$, on a également tracé la tangente au point d'inflexion $(1/\sqrt{2\lambda}, 1/\sqrt{e})$ dont l'équation est

$$\sqrt{e}y + \sqrt{2\lambda}x = 2 \;.$$

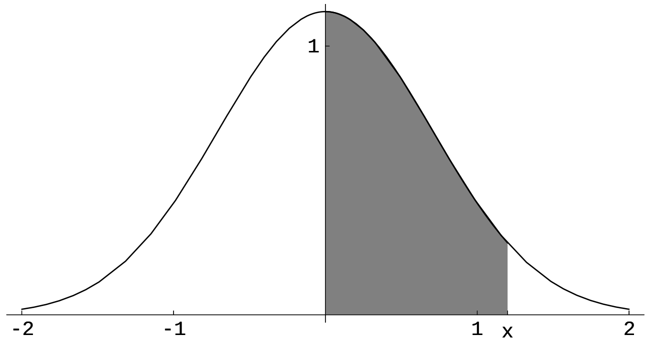


FIGURE 17.6: erf(x) : aire hachurée

La **Fonction d'erreur** notée **erf** est définie par :

$$\boxed{\mathrm{erf}\ :\ x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt}\ .$$

Si $x > 0$ le nombre $\mathrm{erf}(x)$ donne l'aire comprise entre Ox, le graphe de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ et les verticales $t = 0$, $t = x$ (voir la figure 17.6). Il est inutile de chercher à calculer de façon symbolique l'intégrale définissant $\mathrm{erf}(x)$, cette intégrale ne peut s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires déjà introduites.

Etudions la fonction d'erreur. Cette fonction est impaire. D'après le Théorème fondamental (1ère partie)

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\ ,$$

$\mathrm{erf}(x)$ est donc strictement croissant dans $\mathbb{R}$ tout entier. On a aussi

$$\mathrm{erf}''(x) = \frac{-4x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\ .$$

La concavité du graphe est donc tournée vers le haut dans $]-\infty, 0]$, tournée vers le bas dans $[0, +\infty[$; l'origine est donc un point d'inflexion du graphe et la tangente en ce point est la droite $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x$.

Il nous faudrait encore connaître $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{erf}(x)$, plus tard (voir volume 2) on prouvera que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{erf}(x) = 1\ .$$

La droite $y = 1$ est donc asymptote horizontale du côté $+\infty$ et la droite $y = -1$ est donc asymptote horizontale du côté $-\infty$.

On peut maintenant tracer le graphe de la fonction d'erreur comme sur la figure (17.7).

La fonction d'erreur est aussi liée à la Loi normale : si X est la variable aléatoire normale réduite, alors pour tous réels u, v tels que $u < v$ la Théorie des probabilités

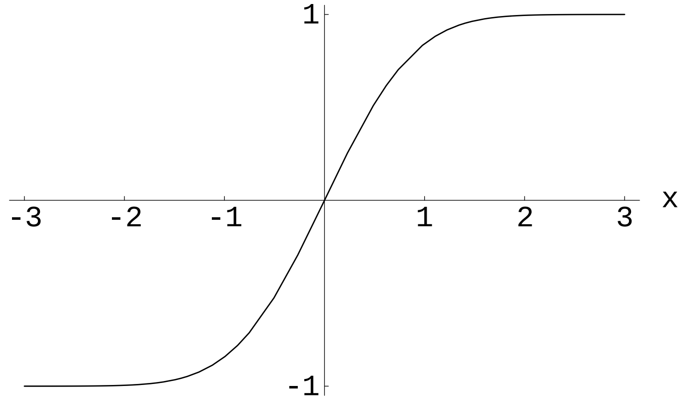


FIGURE 17.7: Graphe de erf(x)

dit que la probabilité de l'événement $u \leq X \leq v$ est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^v e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

c'est-à-dire, en posant $t = \frac{w}{\sqrt{2}}$, par

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{u}{\sqrt{2}}}^{\frac{v}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(\operatorname{erf}(\frac{v}{\sqrt{2}}) - \operatorname{erf}(\frac{u}{\sqrt{2}})) \ .$$

17.4 Utiliser des fonctions à valeurs complexes

Par définition, une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes est une fonction dont l'ensemble de définition est une partie de $\mathbb{R}$ et dont les valeurs sont des complexes. Par exemple :

$$f(x) := (2 + ix)^2$$

définit une telle fonction.
Les fonctions, **partie réelle Re $\boldsymbol{f}$**, **partie imaginaire Im $\boldsymbol{f}$**, conjuguée $\overline{\boldsymbol{f}}$ et **module $|\boldsymbol{f}|$** sont définies comme étant les fonctions dont l'ensemble de définition est celui de f et telles que

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} f)(x) &:= \operatorname{Re}(f(x)) \ , \\ (\operatorname{Im} f)(x) &:= \operatorname{Im}(f(x)) \ , \\ (\overline{f})(x) &:= \overline{f(x)} \ , \\ |f|(x) &:= |f(x)| \ . \end{aligned}$$

Dans l'exemple ci-dessus :

$$(\operatorname{Re} f)(x) = 4 - x^2 \ , \quad (\operatorname{Im} f)(x) = 4x \ , \quad |f|(x) = x^2 + 4 \ , \quad \overline{f}(x) = 4 - x^2 - 4ix \ .$$

Pour étudier la continuité, la dérivabilité, l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, on va considérer la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction qui sont deux fonctions réelles, par définition,

— *f est continue dans E lorsque* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont continues dans E,*

— *f est dérivable dans E lorsque* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont dérivables dans E et*

$$f' := (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)' .$$

— *si $a, b \in \mathbb{R}$ et si f est continue dans $[a, b]$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx .$$

Il s'ensuit :

$$\boxed{(\operatorname{Re} f)' = \operatorname{Re} f' \quad , \quad (\operatorname{Im} f)' = \operatorname{Im} f'} ,$$

$$\boxed{\int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx = \operatorname{Re} \int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx = \operatorname{Im} \int_a^b f(x)\,dx} ,$$

$$\boxed{(\overline{f})' = \overline{f'} \quad , \quad \int_a^b \overline{f}(x)\,dx = \overline{\int_a^b f(x)\,dx}} .$$

Les règles de continuité et de dérivabilité concernant les opérations $\lambda f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ et $f(g(x))$ sont encore vérifiées pour les fonctions à valeurs complexes. De même les propriétés classiques des intégrales et le Théorème Fondamental sont aussi vérifiés pour les intégrales des fonctions à valeurs complexes.

Toutefois, certains résultats importants des fonctions à valeurs réelles ne sont pas vérifiés pour les fonctions à valeurs complexes. Ainsi de par leur énoncé, le Théorème des Valeurs Intermédiaires et le Théorème des Bornes Atteintes n'ont de sens que pour les fonctions à valeurs réelles, de plus nous pourrions espérer que le Théorème de Rolle et la Théorème de Lagrange soient vérifiés pour les fonctions à valeurs complexes, ce n'est pourtant pas le cas comme nous le constatons en prenant $f(x) = \cos x + i \sin x$, puisque $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(x) = -\sin x + i \cos x$ ne s'annule en aucun réel !

17.5 Exponentielle complexe

Nous connaissons e^u et e^{iv} pour tous u, v réels. On voudrait maintenant donner un sens à e^z lorsque z est un nombre complexe quelconque. On voudrait bien entendu que les propriétés que nous connaissons à propos de e^u et de e^{iv} soient maintenues dans cette extension. Comme à l'habitude, a, b représentent des nombres réels

Définition. *On pose*

$$\boxed{e^{a+ib} := e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)) .}$$

Autrement dit

$$e^z := e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} \cdot (\cos(\mathcal{I}z) + i \sin(\mathcal{I}z)) .$$

Cette définition rencontre notre objectif, en effet :

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}\ .}$$

En effet :

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{\mathrm{Re}(z_1+z_2)} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}(z_1+z_2)} = e^{\mathrm{Re}\, z_1+\mathrm{Re}\, z_2} \cdot e^{i(\mathrm{Im}\, z_1+\mathrm{Im}\, z_2)} \\ &= e^{\mathrm{Re}\, z_1} \cdot e^{\mathrm{Re}\, z_2} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}\, z_1} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}\, z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit : *si m est un entier,*

$$\boxed{e^{-z} = \frac{1}{e^z}\ , \qquad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}\ , \qquad (e^z)^m = e^{mz}}\ .$$

De la définition il découle :

$$\boxed{\mathrm{Re}(e^{a+ib}) = e^a \cdot \cos(b)\ , \quad \mathrm{Im}(e^{a+ib}) = e^a \cdot \sin(b)}$$

et aussi

$$\boxed{|e^{a+ib}| = e^a \ \text{ et } \ \overline{e^{a+ib}} = e^{a-ib}}\ .$$

En effet

$$\begin{aligned} &|e^{a+ib}| = |e^a \cdot e^{ib}| = e^a \cdot |e^{ib}| = e^a, \\ &\overline{e^{a+ib}} = e^a \cos b - ie^a \sin b = e^a \cos b + ie^a \sin(-b) = e^a \cdot e^{-ib} = e^{a-ib}\ . \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant considérer la fonction complexe

$$\boldsymbol{x \mapsto e^{z_0\, x}}\ ,$$

en posant $z_0 = a + ib$, nous avonc donc

$$e^{z_0\, x} = e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx))\ .$$

La fonction $x \mapsto e^{z_0 x}$ est continue, dérivable dans $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{(e^{z_0\, x})' = z_0\, e^{z_0\, x}}\ .$$

En effet

$$\begin{aligned} (e^{z_0 x})' &= (e^{ax} \cos(bx))' + i(e^{ax} \sin(bx))', \\ &= ae^{ax} \cos(bx) - e^{ax} b \sin(bx) + iae^{ax} \sin(bx) + ie^{ax} b \cos(bx), \\ &= e^{ax} \cdot z_0 \cdot \cos(bx) + ie^{ax} \cdot z_0 \cdot \sin(bx) \\ &= z_0 \cdot e^{ax} \cdot e^{ibx} = z_0 \cdot e^{z_0 x} \end{aligned}$$

Par conséquent, si $z_0 \neq 0$:

$$\boxed{\int e^{z_0\, x}\, dx \simeq \frac{1}{z_0} e^{z_0 x}}\ .$$

Chapitre 18

Méthodes d'intégration

Ce chapitre est consacré aux méthodes d'intégration symboliques usuelles.

$$\int x^\alpha\, dx \simeq \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{si } \alpha \neq -1 \quad , \quad \int \frac{1}{x}\, dx \simeq \ln|x| \quad \text{dans } \mathbb{R}_0 \ ,$$

$$\int \sin x\, dx \simeq -\cos x \quad , \quad \int \cos x\, dx \simeq \sin x \ ,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \simeq \operatorname{tg} x \quad , \quad \int \frac{-1}{\sin^2 x}\, dx \simeq \operatorname{cotg} x \ ,$$

$$\int e^{z_0 x}\, dx \simeq \frac{e^{z_0 x}}{z_0} \quad \textit{si } z_0 \text{ complexe } \neq 0 \ ,$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx \simeq \operatorname{ch} x \quad , \quad \int \operatorname{ch} x\, dx \simeq \operatorname{sh} x \ ,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx \simeq \operatorname{th} x \quad , \quad \int \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx \simeq \coth x \ .$$

Soit $a > 0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \simeq \arcsin\frac{x}{a} \quad , \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx \simeq \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \ ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx \simeq \operatorname{arcsh}\frac{x}{a} \quad , \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx \simeq \operatorname{arcch}\frac{x}{a} \ .$$

Table 18.1: Primitives élémentaires

D'après le Théorème fondamental (2^e partie), la première méthode de calcul des intégrales consiste à rechercher une primitive de la fonction considérée et à faire varier cette primitive entre les bornes d'intégration, le calcul d'une intégrale passe donc par la recherche de primitives. Il est donc essentiel de connaître les primitives qu'on peut déduire des dérivées des fonctions élémentaires déjà rencontrées, la table 18.1 reprend ces primitives.

Après ce rappel, nous allons donner les méthodes générales d'intégration. Nous verrons ensuite des méthodes particulières qui en sont déduites. Ces méthodes permettent d'obtenir exactement (sans approximation) de nombreuses primitives et intégrales.

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, tous les nombres considérés sont réels et les polynômes et fonctions rationnelles ont leurs coefficients réels.

18.1 Méthode générales d'intégration

Les règles générales de primitivation ne sont rien d'autre que des règles de dérivation formulées en terme de primitives. Ainsi, si f, g sont continues dans un intervalle I et si λ est une constante réelle,

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))\,dx \simeq \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int \lambda f(x)\,dx \simeq \lambda \int f(x)\,dx}\,.$$

Intégration par parties

De la règle de dérivation du produit, il découle :

Soient f, g continûment dérivables dans un intervalle I, alors dans I on a :

$$\boxed{\int f \cdot g'\,dx \simeq f \cdot g - \int g \cdot f'\,dx}\,.$$

En effet les primitives ci-dessus existent dans I car $f \cdot g'$ et $g \cdot f'$ sont continues dans I, de plus

$$[f \cdot g - \int g \cdot f'\,dx]' = f \cdot g' + f' \cdot g - g \cdot f' = f \cdot g'.$$

d'où l'égalité à une constante additive près ci-dessus.
Par exemple, dans $]0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x + 1) \ln x\,dx &\simeq (x^3 - x^2 + x) \ln x - \int (x^2 - x + 1)\,dx \\ &\simeq (x^3 - x^2 + x) \ln x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \end{aligned}$$

en posant $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

De la règle de primitivation par partie, grâce à la 2e partie du Théorème fondamental, on peut maintenant déduire la règle d'intégration par partie :

si f, g sont continûment dérivables dans $[a, b]$, alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}\,. \qquad (18.1)$$

Par exemple, en prenant $f(x) := \ln x$ et $g(x) := x$, on a :

$$\int_1^2 \ln x\, dx = [x\, \ln x]_1^2 - \int_1^2 1dx = 2\ln 2 - 1 \,.$$

Intégration par substitution

Dans la méthode de substitution on considère une nouvelle variable qui doit s'exprimer en fonction de la variable initiale : si x est la variable initiale et si t désigne cette nouvelle variable, on doit disposer d'une fonction exprimant t en fonction de x, les deux variables sont alors reliées par une équation de la forme $t = \varphi(x)$, on dit alors qu'*on pose* $t = \varphi(x)$.

Plaçons-nous dans les conditions suivantes :

— *la variable x varie dans un intervalle I_x et, en posant $t = \varphi(x)$, la variable t se trouve dans un intervalle I_t ;*
— *$\varphi(x)$ est continûment dérivable dans I_x .*

Envisageons d'abord la règle de primitivation :

Alors, si $f(t)$ est continue dans I_t, pour tout x dans I_x on a

$$\boxed{\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx \simeq (\int f(t)\, dt)_{t=\varphi(x)} \,.} \tag{18.2}$$

Il s'agit d'une conséquence de la règle de dérivation d'une fonction composée. En effet, en raison de la continuité de $f(t)$ et de $\varphi'(x)$, les primitives considérées existent, de plus en utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée, dans I_x on a

$$\frac{d}{d\,x}(\int f(t)\, dt)_{t=\varphi(x)} = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \;,$$

d'où la formule ci-dessus.
Par exemple, dans $[0, \pi]$, on a :

$$\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\, dx \;\simeq\; (\int \sqrt{t}\, dt)_{t=\sin x} \;\simeq\; \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} \,.$$

La règle d'intégration s'énonce :

Si $f(t)$ est continue dans $[\varphi(a), \varphi(b)]$ ou dans $[\varphi(b), \varphi(a)]$, alors

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt \,.} \tag{18.3}$$

Démonstration. Nous allons appliquer deux fois le Théorème fondamental, 2[e] partie. Envisageons par exemple le cas $\varphi(a) < \varphi(b)$. Soit $H(t)$ une primitive de $f(t)$ dans $[\varphi(a), \varphi(b)]$, on a donc

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a)) \,. \tag{18.4}$$

Mais, d'après la règle de substitution vue ci-dessus, nous avons aussi

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx \simeq H(\varphi(x)) \ .$$

Par conséquent

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a)) \ . \tag{18.5}$$

Le résultat découle dès lors de (18.4) et (18.5). □

Exemples 18.1.

1. Cherchons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\, dx$. La fonction $\operatorname{tg} x$ est continu dans $[0, \dfrac{\pi}{3}]$, l'intégrale existe donc. Posons $t = \cos x$. Il s'ensuit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = -[\ln t]_1^{\frac{1}{2}} = \ln 2.$$

2. Cherchons $\int_0^2 \dfrac{x}{x^2+1}\, dx$. Posons $t = x^2 + 1$. Il s'ensuit :

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}[\ln t]_1^5 = \frac{1}{2}\ \ln 5.$$

3. Ici on va effectuer une intégration par parties suivie d'une substitution :

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = [x \cdot \operatorname{arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

en posant $f(x) = \operatorname{arctg} x$ et $g'(x) = 1$; il s'ensuit

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{4} - [\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \ .$$

18.2 Intégration des exponentielle-polynômes

Une fonction est qualifiée d'**exponentielle-polynôme** si elle est de la forme

$$e^{z_0 x} P(x)$$

où z_0 est une constante complexe (éventuellement réelle) **non nulle** et $P(x)$ est un polynôme de degré non nul.

Montrons comment chercher

$$\boxed{\int \boldsymbol{e^{z_0 x} P(x)\, dx}} \ .$$

En appliquant la méthode d'intégration par parties on obtient

$$\int e^{z_0 x} P(x)\, dx \simeq \frac{1}{z_0} e^{z_0 x} P(x) - \frac{1}{z_0} \int e^{z_0 x} P'(x)\, dx \ ,$$

où $P'(x)$ est un polynôme de degré $m-1$. Pour chercher $\int e^{z_0 x} P(x)\,dx$ il suffit donc de répéter la méthode ci-dessus jusqu'à ce que le degré du polynôme soit 0.

Par exemple

$$\int e^{2x}(x+1)\,dx \simeq \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx \simeq \frac{1}{4}e^{2x}(2x+1)\,.$$

En pratique, lorsque le degré de $P(x)$ est > 1, on a intérêt à utiliser le résultat suivant car l'intégration se ramène alors à une opération de dérivation suivie d'une identification de coefficients.

Théorème 49. *Si $P(x)$ est un polynôme et si $z_0 \neq 0$, il existe un polynôme $Q(x)$* ***de même degré*** *que $P(x)$ tel que dans $\mathbb{R}$*

$$\boxed{\int e^{z_0 x} P(x)\,dx \simeq e^{z_0 x} Q(x)}\,.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence. Cette proposition est vérifiée lorsque le degré de $P(x)$ est 0. Supposons-la vérifiée lorsque le degré du polynôme est p. Soit $H(x)$ un polynôme de degré $p+1$. Nous avons :

$$\int e^{z_0 x} H(x)\,dx \simeq \frac{1}{z_0} e^{z_0 x} H(x) - \frac{1}{z_0}\int e^{z_0 x} H'(x)\,dx.$$

Or le degré de $H'(x)$ est p, d'où $\int e^{z_0 x} H'(x)\,dx$ est de la forme $e^{z_0 x} G(x)$ avec $G(x)$ un polynôme de degré p. Il s'ensuit

$$\int e^{z_0 x} H(x)\,dx \simeq \frac{1}{z_0} e^{z_0 x}(H(x) - G(x))\,,$$

la proposition est donc vérifiée pour le degré $p+1$ car le degré de $H(x) - G(x)$ est $p+1$. □

Exemple 18.1. *Cherchons* $\displaystyle\int_1^3 e^{2x}(x^2+1)\,dx.$

Solution. Cette intégrale existe car $e^{2x}(x^2+1)$ est continu dans $\mathbb{R}$ d'où dans $[1,3]$. D'après la propriété ci-dessus, on peut poser

$$\int e^{2x}(x^2+1)\,dx \simeq e^{2x}(Ax^2 + Bx + C).$$

Cherchons les constantes A, B, C :

$$(e^{2x}(Ax^2 + Bx + C))' = e^{2x}(2Ax^2 + 2(A+B)x + (2C+B))\,,$$

d'où

$$x^2 + 1 \equiv 2Ax^2 + 2(A+B)x + (2C+B)$$

et

$$2A = 1 \qquad A + B = 0 \qquad 2C + B = 1\,.$$

Par conséquent

$$\int_1^3 e^{2x}(x^2+1)\,dx = [\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+3)]_1^3 = \frac{3e^2}{4}(5e^4-1)\;.$$

Application

Montrons comment obtenir

$$\boxed{\int \boldsymbol{e^{ax}P(x)\ \cos bx\, dx} \qquad , \qquad \int \boldsymbol{e^{ax}P(x)\ \sin bx\, dx}}$$

lorsque a et b sont réels et $P(x)$ est un polynôme à coefficients réels. Nous avons

$$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{array}\right\} e^{(a+ib)x}P(x) \simeq e^{ax}\left\{\begin{array}{c}\cos bx\\ \sin bx\end{array}\right\}P(x)\;.$$

Il s'ensuit

$$\int e^{ax}P(x)\left\{\begin{array}{c}\cos bx\\ \sin bx\end{array}\right\}dx \simeq \left\{\begin{array}{c}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{array}\right\}\int e^{(a+ib)x}P(x)\,dx.$$

On est ainsi ramené à une primitive d'une exponentielle-polynôme.

Exemple 18.2. *Cherchons* $\displaystyle\int (x^2-1)e^{-x}\sin x\,dx\;.$

Solution. On a

$$\int (x^2-1)e^{-x}\sin x\,dx \ \simeq\ \int \mathrm{Im}\, e^{(-1+i)x}(x^2-1)\,dx \ \simeq\ \mathrm{Im}\int e^{(-1+i)x}(x^2-1)\,dx\;.$$

On pose

$$\int e^{(-1+i)}(x^2-1)\,dx \simeq e^{(-1+i)x}(Ax^2+Bx+C),$$

d'où

$$x^2-1 \equiv (-1+i)(Ax^2+Bx+C)+2Ax+B,$$

ce qui donne

$$A = -\frac{1+i}{2} \qquad B=-i \qquad C=1\;.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int (x^2-1)e^{-x}\sin x\,dx &\simeq \mathrm{Im}(e^{-x}(\cos x+i\sin x)(-\frac{1+i}{2}x^2-ix+1))\\ &\simeq e^{-x}((-\frac{x^2}{2}+1)\sin x-(\frac{x^2}{2}+x)\cos x)\;.\end{aligned}$$

18.3 Intégration des fonctions rationnelles

1. Intégration des fractions simples

On appelle fraction simple toute fonction rationnelle d'une des deux formes suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{c}{(ax+b)^m}\,, \\ \dfrac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^m} \end{array}}$$

où $a \neq 0$, m est un naturel non nul et **le trinôme** ax^2+bx+c **n'a pas de racine réelle**.

L'intégration de la première forme de fraction simple s'effectue par substitution en posant $t = ax+b$.

Envisageons les fractions simples de la deuxième forme et travaillons dans $\mathbb{R}$ tout entier. On détermine d'abord des constantes K et I telles que

$$\frac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^m} = K\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m} + \frac{I}{(ax^2+bx+c)^m}\,. \tag{18.6}$$

L'intégration de $\dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}$ s'effectue par substitution en posant

$$t = ax^2+bx+c\,.$$

Passons au deuxième terme de (18.6). Puisque le trinôme n'a pas de racine réelle, on peut trouver des réels J, M et N tels que

$$ax^2+bx+c = J((Mx+N)^2+1) \qquad \text{avec } J,\ M \neq 0\,.$$

(cette opération est appelée "*complétion du carré*").

L'intégration de $\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^m}$ s'effectue par substitution en posant

$$u = Mx+N\,;$$

il reste donc à intégrer $\dfrac{1}{(1+u^2)^m}$. Dans le cas où $m=1$, cela donne $\operatorname{arctg} u$, le cas où $m>1$ est traité après l'exercice qui suit.

Exemple 18.3. *Cherchons* $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx\,.$

Solution. Nous avons

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx &\simeq \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\\ &\simeq \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\ .\end{aligned}$$

Or $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ et donc en posant $u := x+\frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \simeq \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} \simeq \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u}{\sqrt{3}} \simeq \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\ .$$

En conclusion

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx \simeq \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\ .$$

Primitives de $1/(1+x^2)^m$

Soit m un naturel non nul Posons

$$\boxed{I_m(x) := \int \frac{dx}{(1+x^2)^m}}\ .$$

On a $I_1(x) \simeq \mathrm{arctg}\,x$. Pour chercher $I_m(x)$ pour $m>1$ on utilise la formule récurrente suivante :

$$\boxed{I_{m+1}(x) \simeq \frac{2m-1}{2m}I_m(x) + \frac{x}{2m(1+x^2)^m} \quad \text{si } m\in\mathbb{N} \text{ et } m\neq 0}\ .$$

Démonstration.

$$I_{m+1}(x) \simeq \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m+1}} \simeq \int \frac{(1+x^2-x^2)\,dx}{(1+x^2)^{m+1}} \simeq I_m(x) - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{m+1}}\ .$$

Pour chercher $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{m+1}}$, effectuons une intégration par parties :
soient $f(x)=x$, $g'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^{m+1}}$ d'où $f'(x)=1$, $g(x) = \dfrac{-1}{2m(1+x^2)^m}$, ainsi :

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{m+1}} \simeq \frac{-x}{2m(1+x^2)^m} + \frac{1}{2m}I_m(x)\ ,$$

d'où

$$I_{m+1}(x) \simeq I_m(x) + \frac{x}{2m(1+x^2)^m} - \frac{1}{2m}I_m(x) \simeq \frac{2m-1}{2m}I_m(x) + \frac{x}{2m(1+x^2)^m}\ .$$

□

Exemple 18.4. *Cherchons* $I_3(x)$.

Solution.

$$I_2(x) \simeq \frac{1}{2} I_1(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} \simeq \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} \ ,$$

$$I_3(x) \simeq \frac{3}{4} I_2(x) + \frac{x}{4(1+x^2)^2} \ ,$$

d'où

$$I_3(x) \simeq \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2} \ .$$

2. Décomposition en fractions simples

Rappelons qu'une fonction rationnelle est une fraction de deux polynômes. Deux polynômes $P(x)$, $Q(x)$ sont dits premiers entre eux lorsqu'il n'existe pas de polynôme $D(x)$ de degré non nul tels que $P(x)$ et $Q(x)$ soient multiples de $D(x)$. Par exemple $x^3 - 1$ et $x^2 - 4$ sont premiers entre eux, mais $x^3 - 1$ et $x^2 - 1$ ne sont pas premiers entre eux.

Considérons une fonction rationnelle $R(x)$. *On effectue d'abord les éventuelles simplifications. Si le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, on effectue la division.* Il s'ensuit que toute fonction rationnelle $R(x)$ se met sous la forme

$$R(x) = P(x) + \frac{N(x)}{D(x)} \text{ avec } \begin{cases} P(x) \text{ un polynôme,} \\ N(x),\ D(x) \text{ des polynômes premiers entre eux,} \\ \text{degré de } N(x) < \text{ degré de } D(x). \end{cases} \tag{18.7}$$

Un trinôme du second degré à coefficients réels est dit *irréductible* lorsqu'il ne peut être factorisé en deux polynômes du premier degré à coefficients réels, autrement dit lorsqu'il n'a pas de racine réelle. La méthode nécessite qu'on ait factorisé le dénominateur en un produit de polynômes du premier degré ou de trinômes du second degré irréductibles, tous à coefficients réels. On sait qu'une telle factorisation existe [1], mais dans bien des cas on ne peut la trouver explicitement [2]. Algébriquement on peut prouver :

Théorème 50 (Décomposition en fractions simples)**.**
Supposons :

1. *degré de* $N(x) <$ *degré de* $D(x)$,
2. $N(x)$ *et* $D(x)$ *sont premiers entre eux,*
3. *le dénominateur* $D(x)$ *est factorisé sous la forme*

$$D(x) = F_0(x)^{p_0} \cdot F_1(x)^{p_1} \cdot \ldots \cdot F_n(x)^{p_n}$$

où

1. voir par exemple [8])
2. ainsi il n'existe pas d'algorithme, c'est-à-dire de méthode effective, permettant de factoriser un polynôme de degré ≥ 5

— *les $F_k(x)$ sont des polynômes à coefficients réels, du premier degré ou du second degré irréductibles,*
— *aucun $F_k(x)$ n'est multiple d'un autre $F_j(x)$,*
— *où chaque p_k est un naturel > 0 .*

alors la fonction rationnelle $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ *se décompose d'une et d'une seule façon en une somme de fractions simples dont les dénominateurs sont de la forme $F_i(x)^j$ avec* $\mathbf{j}$ ***parmi*** $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{p_i}$.

On ne démontre pas ici ce résultat mais pratiquement voici comment obtenir cette décomposition pour autant qu'on ait au préalable factorisé le dénominateur sous la forme précisée plus haut :

1. on pose la décomposition,
2. on cherche les coefficients de cette décomposition en réduisant au même dénominateur et en identifiant les deux numérateurs.

Par exemple,

1. $\dfrac{x-1}{(x+1)^3} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3} = \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{2}{(1+x)^3}$.
2. $\dfrac{2x^2-3}{(x^3+1)^2} = \dfrac{2x^2-3}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}$, d'où on pose
$$\frac{2x^2-3}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2},$$
il s'ensuit
$$\frac{2x^2-3}{(x^3+1)^2} = -\frac{4}{9\,(1+x)} - \frac{5}{9\,(1+x)^2} + \frac{-3+4\,x}{9\,(1-x+x^2)} + \frac{5\,(-1+x)}{3\,(1-x+x^2)^2}\,.$$
3. $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{1}{3\,(x-1)} - \dfrac{1}{3\,(x+2)}$.
4. $\dfrac{x^3+x}{x^4+1} = \dfrac{x^3+x}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$,
d'où il découle
$$\frac{x^3+x}{x^4+1} = \frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2(x^2+\sqrt{2}\,x+x^2)} + \frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2(x^2-\sqrt{2}\,x+1)}\,.$$

3. Intégration des fonctions rationnelles

Pour intégrer une fonction rationnelle, si le cas se présente on effectue les simplifications possibles et, s'il y a lieu on effectue la division, on aboutit ainsi à la décomposition (18.7), ensuite on effectue la décomposition en fractions simples. On est ainsi ramené à intégrer des fractions simples. Cette méthode est valable dans $\mathbb{R}$ excepté aux racines du dénominateur.

Exemple 18.5. *Recherchons* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ *dans* $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

Solution.

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}\ ,$$

d'où $A+B=0,\ -A+B+C=0,\ A+C=1$, ce qui donne

$$A=\frac{1}{3}\ ,\ B=\frac{-1}{3}\ ,\ C=\frac{2}{3}\ .$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &\simeq \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx \\
&\simeq \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}(\frac{-1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}) \\
&\simeq \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}\ .
\end{aligned}$$

Or $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, en posant $u=x-\frac{1}{2}$ on a

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}\simeq\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}\simeq\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}\simeq\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\ .$$

En conclusion

$$\int\frac{dx}{x^3+1}\simeq\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\ .$$

Exemple 18.6. *Recherchons* $\displaystyle\int\frac{x^3-x^2+5x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$ *dans* $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

Solution.

$$\frac{x^3-x^2+5x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}\ ,$$

d'où

$$x^3-x^2+5x+1\equiv(Ax+B)(x-1)^2+C(x-1)(x^2+1)+D(x^2+1).$$

En prenant $x=1$, on obtient $D=3$ et en faisant $x=i$, il vient $(Ai+B)(-2i)=2+4i$ d'où $A=1$ et $B=-2$. De plus $1=B-C+D$ d'où $C=0$.

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^3-x^2+5x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}dx &\simeq \int\frac{x-2}{x^2+1}dx+3\int\frac{dx}{(x-1)^2} \\
&\simeq \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-2\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{3}{x-1} \\
&\simeq \frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x-\frac{3}{x-1}\ .
\end{aligned}$$

4. Expression rationnelle de plusieurs variables

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des variables. Une **expression rationnelle** de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ est une expression obtenue en effectuant une succession finie d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) au départ de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et de constantes. Une expression rationnelle d'une seule variable peut toujours se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle de cette seule variable. **Les méthodes qui vont suivre consistent souvent à transformer l'expression à intégrer en une fonction rationnelle, d'où évidemment l'importance de la méthode qu'on vient de voir.**

18.4 Intégration des expressions en $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$

Il s'agit d'intégrer des fonctions de la forme

$$\boxed{\boldsymbol{R(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x)}}$$

où $R(u,\ v,\ w)$ est une expression rationnelle de $u,\ v,\ w$. On va montrer comment transformer la fonction à intégrer en une fonction rationnelle ; il s'agit donc d'*enlever les fonctions trigonométriques sans bien entendu introduire de racine.*

Envisageons d'abord quelques cas particuliers, ensuite on verra une méthode applicable dans tous les cas. Lorsque les méthodes particulières sont utilisables, il est a priori plus intéressant de les utiliser. Ici k représente toujours un entier quelconque.

1. Fonction impaire en $\cos x$ ou $\sin x$

La fonction $H(\sin x, \cos x)$ est dite impaire en $\cos x$, respectivement impaire en $\sin x$, lorsqu'elle se met sous la forme

$$\boxed{\boldsymbol{F(\sin x) \cdot \cos x}}\ , \tag{18.8}$$

respectivement

$$\boxed{\boldsymbol{F(\sin x) \cdot \cos x}}\ . \tag{18.9}$$

Remarquons que si $H(\sin x, \cos x)$ est impaire en $\cos x$, respectivement impaire en $\sin x$, alors

$$H(\sin x, -\cos x) = -H(\sin x, \cos x)\ ,$$

respectivement

$$H(-\sin x, \cos x) = -H(\sin x, \cos x)\ .$$

Pour intégrer (18.8) on effectue la substitution $t = \sin x$ et pour intégrer (18.9) on effectue la substitution $t = \cos x$. Dans les deux cas on est ainsi amené à intégrer la fonction rationnelle $F(t)$.

Exemple 18.7. *Recherchons* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ *pour* $x \neq k\pi$ *.*

Solution.
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} \simeq \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2} dx$$
d'où en posant $t = \cos x$,
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^3 x} &\simeq - \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} \simeq -\frac{1}{4} \int (\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}) dt \\ &\simeq -\frac{1}{4} (-\ln|1-t| + \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| - \frac{1}{1+t}) \simeq \frac{1}{4} (\ln|\frac{1-t}{1+t}| - \frac{2t}{1-t^2}) \\ &\simeq \frac{1}{4} (\ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}) \simeq \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &\simeq \frac{1}{2} (\ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| - \frac{\cos x}{\sin^2 x}) \ .\end{aligned}$$

2. Fonction paire en $\cos x$ et $\sin x$

La fonction $H(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)$ est dite paire en $\cos x$ et $\sin x$ lorsqu'elle se met sous la forme
$$\boxed{\boldsymbol{F(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x)}} \ .$$
Remarquons qu'alors
$$H(-\sin x, -\cos x, \operatorname{tg} x) = H(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) \ .$$
Dans ce cas la fonction à intégrer s'écrit aussi
$$\frac{F(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} (1+\operatorname{tg}^2 x)$$
et on effectue dès lors la substitution $t = \operatorname{tg} x$, ainsi
$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \ , \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \ , \ \operatorname{tg} x = t \ \text{ et } (1+\operatorname{tg}^2 x) dx = dt \ ,$$
on est ainsi amené à intégrer la fonction
$$\frac{1}{1+t^2} F(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t) \ ,$$
qui est une fonction rationnelle en t. Ces calculs ne sont évidemment pas valables aux multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$.

Exemple 18.8. *Cherchons* $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Solution. Cette primitive existe dans $\mathbb{R}$ mais la méthode suivie nous permet d'obtenir la primitive pour $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.
$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \simeq \int \frac{dt}{(1+\frac{1}{1+t^2})(1+t^2)} \simeq \int \frac{dt}{2+t^2}$$

en posant $t = \operatorname{tg} x$.
Posons maintenant $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, nous avons

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \simeq \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\frac{t^2}{2}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{1+u^2} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} u \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}) \ .$$

3. Produits de $\sin x$ et de $\cos x$

Il s'agit d'intégrer des expressions de la forme

$$\boxed{\sin^n x \cos^m x}$$

où m et n sont des naturels

Si m ou n est impair, on peut se ramener au cas d'une fonction impaire en $\cos x$ ou $\sin x$.

Si m et n sont pairs, on a intérêt à transformer $\sin^n x \cos^m x$ en une somme de $\cos px$ ou $\sin qx$, l'intégration est alors immédiate. Cette transformation s'opère soit en utilisant les formules de trigonométrie

$$2\sin x\cos x = \sin(2x)\ ,\ 2\sin^2 x = 1-\cos(2x)\ ,\ 2\cos^2 x = 1+\cos(2x)\ .$$

On peut aussi utiliser les Formules d'Euler.

Exemple 18.9. *Cherchons* $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ *dans* $\mathbb{R}$.

Solution.

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^4 x &= \frac{1}{4}\sin^2 2x \cos^2 x = \frac{1}{16}(1-\cos 4x)(1+\cos 2x) \\
&= \frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 4x\cos 2x) \\
&= \frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 2x) \\
&= \frac{1}{16}(1+\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x)\ ;
\end{aligned}$$

on a donc

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx \simeq \frac{1}{16}(x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x)\ .$$

En utilisant la formule d'Euler, on aurait obtenu :

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^4 x &= (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^2 (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4 \\
&= -\frac{1}{2^6}(e^{2ix}-2+e^{-2ix})(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}) \\
&= -\frac{1}{2^6}(e^{6ix}+4e^{4ix}+6e^{2ix}+4+e^{-2ix}-2e^{4ix}-8e^{2ix}-12-8e^{-2ix}-2e^{-4ix} \\
&\quad +e^{2ix}+4+6e^{-2ix}+4e^{-4ix}+e^{-6ix}) \\
&= -\frac{1}{2^6}(2\cos 6x+4\cos 4x-2\cos 2x-4)\ .
\end{aligned}$$

4. Cas général

On effectue la substitution $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$. On a

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{tg}\,x = \frac{2t}{1-t^2}$$

et

$$(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2})\frac{dx}{2} = dt \text{ d'où } dx = \frac{2dt}{1+t^2}\ ,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \int R(\sin x,\, \cos x,\, \mathrm{tg}\,x)\,dx &\simeq \int \frac{R(\sin x,\, \cos x,\, \mathrm{tg}\,x)}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2})\,dx \\ &\simeq 2(\int \frac{1}{1+t^2}\,R(\frac{2t}{1+t^2},\, \frac{1-t^2}{1+t^2},\, \frac{2t}{1-t^2})\,dt)_{t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}\ . \end{aligned}$$

Les calculs ci-dessus sont valables seulement pour $x \neq (2k+1)\pi$.

Exemple 18.10. *Cherchons* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\sin x}$.

Solution. La fonction $\frac{1}{3+2\sin x}$ est continue dans $\mathbb{R}$ donc dans $[0,\pi/2]$, l'intégrale existe donc. L'intervalle d'intégration ne contient aucun multiple impair de π, on peut donc appliquer la substitution $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ à l'intégrale considérée. Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\sin x} = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)(3+2\frac{2t}{1+t^2})} = \int_0^1 \frac{2dt}{3t^2+4t+3}\ .$$

Or $3t^2+4t+3 = \frac{1}{3}\left((3t+2)^2+5\right)$, posons $u = 3t+2$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\sin x} &= 2\textstyle\int_2^5 \frac{du}{u^2+5} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}(\frac{u}{\sqrt{5}})\right]_2^5 \\ &= 2\textstyle\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathrm{arctg}(\sqrt{5}) - \mathrm{arctg}(\frac{2}{\sqrt{5}})) \end{aligned}$$

Remarque.
On peut utiliser les formules de trigonométrie pour modifier l'expression à intégrer, mais il ne faut pas perdre le caractère rationnel de cette expression, il ne faut donc jamais introduire de racine. Par exemple nous pouvons remplacer $\sin^2 x$ *par* $1-\cos^2 x$ *mais il ne faut pas remplacer* $\sin x$ *par* $\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ *!*

18.5 Intégration des expressions en $\mathrm{ch}\,ax$, $\mathrm{sh}\,ax$

Il s'agit d'intégrer les expressions de la forme

$$\boxed{R(\mathrm{ch}\,ax,\, \mathrm{sh}\,ax)}$$

où $a \neq 0$ et $R(u, v, w)$ est une expression rationnelle de u, v, w.
1. Dans des cas simples, on peut utiliser des formules concernant les fonctions hyperboliques. Par exemple :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} \simeq -\coth x\ ,$$

et

$$\int \frac{\operatorname{sh} x dx}{1+\operatorname{ch} x} \simeq \int \frac{dt}{1+t}$$

où on a posé $t = \operatorname{ch} x$, d'où

$$\int \frac{\operatorname{sh} x dx}{1+\operatorname{ch} x} \simeq \ln(1+t) \simeq \ln(1+\operatorname{ch} x)\ .$$

2. En général, on peut exprimer les fonctions hyperboliques en fonction de e^{ax}. Ainsi

$$\int R(\operatorname{ch} ax, \operatorname{sh} ax)\, dx = \int R(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}, \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2})\, dx$$

Il suffit alors d'effectuer la substitution $t = e^{ax}$ ce qui donne :

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{t} R(\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}), \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}))\, dt\right)_{t=e^{ax}}\ .$$

Exemple 18.11. *Cherchons* $\int \frac{dx}{1+\operatorname{ch} x}$.

Solution.

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{ch} x} \simeq 2\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+2e^x+1}\ ,$$

d'où en posant $t = e^x$ on obtient

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{ch} x} \simeq 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} \simeq \frac{-2}{t+1} \simeq \frac{-2}{1+e^x}\ .$$

18.6 La Méthode de substitution appliquée en sens opposé

Nous allons compléter ce qu'on a dit à propos de l'intégration par substitution à la page 209. Rappelons les conditions :

(1) *la variable x varie dans un intervalle I_x, la variable t se trouve dans un intervalle I_t et les variables x et t sont reliées $t = \varphi(x)$,*

(2) *$\varphi(x)$ est continûment dérivable dans I_x.*

Alors on avait seulement besoin de connaître la nouvelle variable t par rapport à la variable initiale x. On utilisait la formule de primitivation (18.2) ou d'intégration (18.3) en allant de gauche vers la droite. Mais on peut aussi appliquer la méthode en sens inverse :
— chercher $\int f(t)dt$ grâce à $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$,
— chercher $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ au moyen de $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Cela nécessite qu'on connaisse aussi la variable x en fonction de t. Dans un cas pareil,

*à tout t dans I_t il doit correspondre un et un seul x dans I_x et inversement à tout x dans I_x il doit correspondre un et un seul t dans I_t, on dit alors que $t = \varphi(x)$ définit une **changement de variable** entre I_t et I_x.*

Une telle situation se présente lorsque $\varphi(x)$ est strictement monotone dans I_x et qu'on prend pour I_t l'image de I_x par la fonction $x \mapsto \varphi(x)$. Alors à tout t dans I_t il correspond un seul x dans I_x et on peut considérer la fonction réciproque de $x \in I_x \mapsto t = \varphi(x)$, qu'on note φ^{-1}, ainsi $t \in I_t \mapsto x = \varphi^{-1}(t)$. Alors

$$x \in I_x \text{ et } t = \varphi(x) \text{ si et seulement si } t \in I_t \text{ et } x = \varphi^{-1}(t)$$

Ci-dessous, en plus des conditions (1) et (2) rappelées plus haut, supposons la condition suivante vérifiée :

(3) *$\varphi(x)$ est strictement monotone dans I_x et soit I_t l'image de I_x par φ.*

Lisons la formule de primitivation par substitution (18.2) en exprimant la réponse en fonction de la variable t, on obtient :

si $f(t)$ est continue dans I_t, alors pour tout t dans I_t on a

$$\boxed{\int f(t)\,dt \simeq [\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dxt]_{x=\varphi^{-1}(t)}}\,. \tag{18.10}$$

De même si l'intervalle $[c, d]$ est inclus dans I_t, utilisons la formule d'intégration par substitution (18.3) en remplaçant $\varphi(a)$ par c et $\varphi(b)$ par d, on obtient $a = \varphi^{-1}(c)$ et $b = \varphi^{-1}(d)$, il s'ensuit :

si $[c, d]$ est inclus dans I_t et si $f(t)$ est continue dans $[c, d]$,

$$\boxed{\int_c^d f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\,.} \tag{18.11}$$

On va utiliser cela pour intégrer certaines fonctions contenant des racines. Le principe est chaque fois d'effectuer un changement de variable éliminant les racines.

18.7 Intégration des irrationnelles $R(x, \sqrt[p]{ax+b})$

Il s'agit d'intégrer une fonction de la forme

$$\boxed{\boldsymbol{R(x,\ \sqrt[p]{ax+b})}}$$

où $a \neq 0$ et $R(u, v)$ est une expression rationnelle de u et v.

L'idée est simple : on pose

$$t = \sqrt[p]{ax+b}\,.$$

La fonction $\sqrt[p]{ax+b}$ est strictement monotone (croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$)

— entre l'intervalle $I_x = \{x : ax+b \geq 0\}$ et $I_t = [0, +\infty[$ si p est pair,
— $I_x = \mathbb{R}$ et $I_t = \mathbb{R}$ si p est impair.

En prenant la fonction réciproque, on obtient

$$x = \frac{t^p - b}{a} .$$

Il s'ensuit

$$\int R(x, \sqrt[p]{ax+b})\, dx \simeq \frac{p}{a}[\int R(\frac{t^p-b}{a}, t) t^{p-1}\, dt]_{t=\sqrt[p]{ax+b}}.$$

Nous obtenons de la sorte une primitive d'une fonction rationnelle. On procède de la même façon pour les intégrales en adaptant les bornes d'intégration.

Exemple 18.12. *Cherchons* $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx$.

Solution. $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ est continu dans $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ d'où également dans $[3, 8]$. L'intégrale existe donc.
Posons $t = \sqrt{x+1}$, on se place ainsi dans les intervalles $I_x = [-1, +\infty[$ et $I_t = [0, +\infty[$. Puisque $[3, 8] \subset I_x$,

$$\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx = \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\, 2t\, dt = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\, dt .$$

On a

$$\frac{2t^2}{t^2-1} = 2 + \frac{2}{t^2-1} = 2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} ,$$

d'où

$$2\int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt \simeq 2t + \ln|\frac{t-1}{t+1}| .$$

Il s'ensuit

$$\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx = [2t + \ln|\frac{t-1}{t+1}|]_2^3 = 2 + \ln\frac{3}{2} .$$

Exemple 18.13. *Cherchons* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$ *dans* $]0, +\infty[$.

Solution. Nous sommes ici en présence de deux racines d'ordre différent, mais on se ramène au cas d'une seule racine en remarquant que $\sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3$ et $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2$. Posons donc $t = \sqrt[6]{x}$. Ainsi I_x et I_t coïncident avec $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx &\simeq \int \frac{t^3}{t^2+1}\, 6\, t^5\, dt \simeq 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\, dt \\
&\simeq 6\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2})\, dt \\
&\simeq \frac{6}{7}\, t^7 - \frac{6}{5}\, t^5 + 2\, t^3 - 6\, t + \operatorname{arctg} t \\
&\simeq \frac{6}{7}\, x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}\, x^{\frac{5}{6}} + 2\, x^{\frac{1}{2}} - 6\, x^{\frac{1}{6}} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}.
\end{aligned}$$

18.8 Intégration des irrationnelles $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Envisageons la présence d'une des racines suivantes :

$$\sqrt{1-x^2} \quad , \quad \sqrt{x^2+1} \quad , \quad \sqrt{x^2-1}\,.$$

Que faut-il poser pour éliminer cette racine ? L'idée est simple :
— puisque $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, dans le premier cas il suffit de poser $x = \sin t$ avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ car alors $\sqrt{1-x^2} = \cos t$;
— puisque $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$,
  1. dans le second cas on doit poser $x = \operatorname{sh} t$ car alors $\sqrt{x^2+1} = \operatorname{ch} t$,
  2. dans le troisième cas on doit poser
     $x = \operatorname{ch} t$ avec $t \geq 0$ si on considère $x \geq 1$,
     $x = -\operatorname{ch} t$ avec $t \geq 0$ si on considère $x \leq -1$,
     en effet alors on a $\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t$.

La méthode qu'on va voir ne fait qu'appliquer l'observation ci-dessus.

1. Irrationnelle de la forme $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$

Il s'agit d'intégrer des fonctions de la forme

$$\boxed{\boldsymbol{R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})}}$$

où $a > 0$ et $R(u,\ v)$ est une expression rationnelle de u, v. On pose

$$x = a\sin t \ \text{ où } \ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Ici $I_x = [-a, a]$ et $I_t = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Remarquons que $a\sin t$ est strictement croissant dans I_t et en sens opposé on a $t = \arcsin\frac{x}{a}$. Ainsi

$$\sqrt{a-x^2} = a\cos t$$

et on a

$$\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx \simeq (\int R(a\sin t,\ a\cos t)a\cos t\,dt)_{t=\arcsin\frac{x}{a}}\,.$$

Nous sommes ainsi ramenés à une primitive d'une expression rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$. On procède de façon semblable pour les intégrales en adaptant les bornes d'intégration.

Exemple 18.14. *Cherchons* $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ *dans* $]-a, a[$ *et* $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Solution.
1. Posons $x = a\ \sin t$ avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, Ainsi

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t\ ,\ dx = a\cos t\,dt;\,,\ t = \arcsin(\frac{x}{a})\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &\simeq a^2 \int \cos^2 t\, dt \simeq \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt \\ &\simeq \frac{a^2}{2}\,(t + \frac{\sin 2t}{2}) \simeq \frac{a^2}{2}\,(t + \sin t\, \cos t) \\ &\simeq \frac{a^2}{2}\, \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\end{aligned}$$

Remarque : la primitive obtenue ci-dessus est valable seulementdans $]-a, a[$, mais la primitive existe dans $[-a, a]$ puisque $\sqrt{a^2 - x^2}$ est continue dans $[-a, a]$.

2. Cherchons l'intégrale. La fonction $\sqrt{a^2 - x^2}$ est continue dans $[-a, a]$ d'où continu dans $[0, a]$, l'intégrale existe donc Comme ci-dessus, posons $x = a \sin t$ avec t dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $[0, a] \subset I_x = [-a, a]$, on a

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2}\, [t + \frac{\sin 2t}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Ce double exemple montre bien que lors d'un calcul d'intégrale par la méthode de substitution, **il est plus avantageux d'appliquer cette méthode en modifiant les bornes d'intégration que de l'appliquer uniquement pour le calcul de la primitive**. En effet en modifiant l'ensemble d'intégration on ne doit pas après le calcul de la primitive exprimer celle-ci en fonction de x et on peut ainsi 'oublier' la variable initiale.

2. Irrationnelle de la forme $R(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})$

Il s'agit d'intégrer des fonctions de la forme

$$\boxed{\boldsymbol{R(x,\ \sqrt{x^2 \pm a^2})}}$$

où $a > 0$ et $R(u, v)$ est une expression rationnelle de u, v.

1er cas : $\boldsymbol{R(x,\ \sqrt{x^2 + a^2})}$
On pose $x = a \operatorname{sh} t$, ici $I_t = \mathbb{R}$ et $I_x = \mathbb{R}$. Remarquons que $a \operatorname{sh} t$ est strictement croissant dans I_t et, en sens opposé, on a $t = \operatorname{arcsh}(\frac{x}{a})$. Ainsi

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \operatorname{ch} t \quad , \quad dx = a \operatorname{ch} t\, dt \quad ,$$

et

$$\int R(x,\ \sqrt{x^2 + a^2})\, dx \simeq a(\int R(a \operatorname{sh} t, a \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t\, dt)_{t = \operatorname{arcsh}(\frac{x}{a})}\,.$$

2e cas : $\boldsymbol{R(x,\ \sqrt{x^2 - a^2})}$
Deux cas se présentent : $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Lorsque $x \geq a$, on pose $x = a \operatorname{ch} t$ où $t \geq 0$, ici $I_x = [a, +\infty[$ et $I_t = [0, +\infty[$. Remarquons que $a \operatorname{ch} t$ est strictement croissant dans I_t et, en sens opposé, on a $t = \operatorname{arcch}(\frac{x}{a})$. Alors

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{sh} t \;\;,\;\; dx = a \operatorname{sh} t\, dt \;\;,$$

et

$$\int R(x,\, \sqrt{x^2-a^2})\, dx \simeq a\Big(\int R(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t\, dt\Big)_{t=\operatorname{arcch}(\frac{x}{a})} .$$

Lorsque $x \leq -a$, on pose $x = -a \operatorname{ch} t$ où $t \geq 0$, ici $I_x =]-\infty, -a]$ et $I_t = [0, +\infty[$. Remarquons que $-a \operatorname{ch} t$ est strictement décroissant dans I_t et, en sens opposé, on a $t = \operatorname{arcch}(-\frac{x}{a})$. Alors

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{sh} t \;\;,\;\; dx = -a \operatorname{sh} t\, dt \;\;,$$

et

$$\int R(x,\, \sqrt{x^2-a^2})\, dx \simeq -a\Big(\int R(-a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t\, dt\Big)_{t=\operatorname{arcch}(-\frac{x}{a})} .$$

Dans ces deux cas on est ainsi ramené à intégrer une expression rationnelle en $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh} t$, ce qu'on a déjà envisagé précédemment. Si on calcule une intégrale, on adapte les bornes d'intégration. Si on cherche une primitive, les calculs peuvent être plus désagréables car il faut alors exprimer la réponse finale en fonction de x, pour ce faire on peut utiliser les fonctions hyperboliques réciproques arcsh ou arcch. Les formules (17.2) (page 201) peuvent au besoin être utiles.

Exemple 18.15. *Recherchons* $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ *dans* $\mathbb{R}$

Solution. Posons $x = \operatorname{sh} t$. Ainsi

$$\sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t \;,\; dx = \operatorname{ch} t\, dt \;,\; t = \operatorname{arcsh}(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1}) \;,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+1} dx &\simeq \int \operatorname{ch}^2 t dt \simeq \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\, dt \\ &\simeq \frac{1}{4}\Big(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t\Big) \qquad (18.12) \\ &\simeq \frac{1}{8}\Big((x+\sqrt{x^2+1})^2 - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} + 4\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big) . \end{aligned}$$

Mais ces calculs se mènent de façon plus agréable si nous utilisons les propriétés des fonctions hyperboliques, remarquons que (18.12) s'écrit aussi

$$\frac{1}{4}(\operatorname{sh}(2t) + 2t) = \frac{1}{4}(2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + 2t) = \frac{1}{4}(2 \operatorname{sh} t \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} + 2t) \;,$$

de la sorte

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx \simeq \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})) .$$

Exemple 18.16. *Recherchons* $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solution. $\sqrt{x^2-1}$ est continue dans $[1,2]$, l'intégrale existe donc.
Posons $x = \operatorname{ch} t$ où $t \geq 0$, ici $I_x = [1,+\infty[$ et $I_t = [0,+\infty[$. On a

$$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t\ ,\ dx = \operatorname{sh} t\,dt\ ,\ t = \operatorname{arcch} x\ .$$

Puisque $[1,2] \subset I_x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx &= \int_0^{\operatorname{arcch} 2} \operatorname{sh}^2(t)\,dt \\
&= \int_0^{\operatorname{arcch} 2} \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}\,dt = \int_0^{\operatorname{arcch} 2} \frac{\operatorname{ch}(2t)-1}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}[\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t]_0^{\operatorname{arcch} 2} = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1} - t]_0^{\operatorname{arcch} 2} \\
&= \sqrt{3} - \frac{\operatorname{arcch} 2}{2} = \sqrt{3} - \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}
\end{aligned}$$

3. Cas général

Envisageons le cas général et montrons comment intégrer des fonctions de la forme

$$\boxed{\boldsymbol{R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})}}$$

où $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$ et $R(u,v)$ est une expression rationnelle de u et v .

Par "*complétion du carré* ", le trinôme ax^2+bx+c peut se mettre sous la forme

$$K(\,A \pm (Mx+N)^2) \qquad \text{avec } K > 0 \text{ et } A \neq 0\ ,$$

ces coefficients ne sont d'ailleurs pas uniques, le choix de K dictant la valeur des autres coefficients. En effectuant la substitution $u = Mx+N$ on obtient

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \simeq (\frac{1}{M}\int R(\frac{u-N}{M},\ \sqrt{K}\sqrt{A\pm u^2})\,du)_{u=Mx+N}.$$

et on est ainsi conduit à un des types envisagés ci-dessus.

Exemple 18.17. *Recherchons* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x+1}dx$ *dans* $]-1,\,3]$.

Solution. On a : $3+2x-x^2 = 4-(x-1)^2$. La fonction à primitiver est continue dans $]-1,3]$, travaillons donc dans $]-1,3]$. Effectuons la substitution $y = x-1$, ainsi y varie alors dans $E_y =]-2,2]$. Nous obtenons

$$\int \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x+1}dx \simeq \int \frac{\sqrt{4-y^2}}{y+2}dy\ .$$

Posons $y = 2\sin t$ avec t dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ici $I_y = [-2, 2]$ et $I_t = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $E_y \subset I_y$, on peut travailler dans E_y tout entier. Il s'ensuit :

$$\sqrt{4-y^2} = 2 \;\; , \;\; \cos t \;\; , \;\; dy = 2\cos t\, dt \;\; , \;\; t = \arcsin\frac{y}{2} \; ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x+1}dx &\simeq \int \frac{2\cos^2 t}{\sin t + 1}dt \simeq 2\int (1-\sin t)\, dt \simeq 2t + 2\cos t \\
&\simeq 2\arcsin\frac{y}{2} + \sqrt{4-y^2} \\
&\simeq 2\arcsin\frac{x-1}{2} + \sqrt{3+2x-x^2} \, .
\end{aligned}$$

Exemple 18.18. *Cherchons* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Solution. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ est continue dans $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ d'où continue dans $[0,\, 1]$, l'intégrale existe donc. Complétons le carré : $x^2+x+1 = (x+\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}$. Posons $u = x + \frac{1}{2}$, on obtient

$$I = \int_{1/2}^{3/2} \frac{du}{(u+\frac{1}{2})\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} \, .$$

Posons $u = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t$, ainsi $I_t = I_u = \mathbb{R}$ et évidemment $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \subset I_t$. On a

$$\sqrt{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t \; , \; du = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\, dt \; , \; t = \operatorname{arcsh}(\frac{2u}{\sqrt{3}}) \, .$$

On obtient

$$I = \int_{\operatorname{arcsh}(1/\sqrt{3})}^{\operatorname{arcsh}\sqrt{3}} \frac{2\, dt}{\sqrt{3}\operatorname{sh} t + 1} = \int_{\operatorname{arcsh}(1/\sqrt{3})}^{\operatorname{arcsh}\sqrt{3}} \frac{4e^t\, dt}{\sqrt{3}e^{2t} + 2e^t - \sqrt{3}} \, .$$

Effectuons la substitution $y = \frac{e^t}{\sqrt{3}}$. Puisque

$$e^{\operatorname{arcsh}(1/\sqrt{3})} = \sqrt{3} \text{ et } e^{\operatorname{arcsh}(\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$$

on obtient

$$I = \int_1^{1+2/\sqrt{3}} \frac{4}{3y^2+2y-1}dy \, .$$

Puisque

$$\frac{4}{3y^2+2y-1} = \frac{3}{3y-1} - \frac{1}{y+1}$$

on a

$$I = [\ln\frac{3y-1}{y+1}]_1^{1+2/\sqrt{3}} = \ln 3 \, .$$

Mise en garde

Pour modifier les bornes d'intégration dans $\int_a^b f(x)dx$ au moyen d'une substitution $t = \varphi(x)$ il est indispensable que $[a, b]$ soit contenu dans l'intervalle I_x. Voici un exemple éloquent à ce sujet. Considérons $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$. Nous savons que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Mais raisonnons autrement : posons $t = 1/x$ qui établit un changement de variable entre $\mathbb{R}_0$ et $\mathbb{R}_0$. **Nous ne pouvons pas modifier les bornes d'intégration car** $[-1, 1]$ **n'est pas une partie de** $\mathbb{R}_0$. Oublions cela et appliquons la formule ! On obtient :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{1}^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = -I$$

d'où $I = 0$ alors que $I = \pi/2$! Voilà ce qui peut arriver lorsqu'on oublie de vérifier les hypothèses.

18.9 Exercices

Cherchez les primitives et les intégrales suivantes (quand elles existent). Justifiez l'existence des intégrales et indiquez où le calcul de la primitive est valable.

1.

1) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x)\,dx$

3) $\displaystyle\int e^{2x} \sin x\,dx$

4) $\displaystyle\int e^{\sin x} \cos x\,dx$

5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

6) $\displaystyle\int (2-3x)\ln x\,dx$

7) $\displaystyle\int e^{2x}(x^2-2x)dx$

8) $\displaystyle\int_1^2 e^x(x^2-1)dx$

9) $\displaystyle\int e^{-x}\, cos(2x)\,(-5x^2+4x-7)\,dx$

11) $\displaystyle\int xe^{-x}\cos(2x)\,dx$

12) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

13) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

14) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^x}\,dx$

15) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2x-1}$

16) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

17) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{9+\sin^2 x}\,dx$

18) $\displaystyle\int_0^{1/2} x^2 \arcsin x\,dx$

19) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

10) $\displaystyle\int e^{3x}(x+1)\sin(2x)\,dx$

20) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

2.

1) $\displaystyle\int \frac{3}{(2x-5)^4}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+1}{x^2-5x+6}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{8x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-5x+6}\,dx$

8) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^4-1}\,dx$

9) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-3x+7}{x^3-7x^2+12x}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{6x^2+15x+7}{(x-3)(4x^2+4x+5)}\,dx$

3.

1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$

3) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\sin^4 x\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\ x}{1+\sin 2x}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x}\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+4\sin 2x}\,dx$

9) $\displaystyle\int \sin 3x\,\cos 2x\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\,\cos x}\,dx$

11) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

13) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

14) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 5x\,\cos 3x\,dx$

15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,x\,dx$

16) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

17) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

18) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{5+3\cos x}\,dx$

4.

1) $\displaystyle\frac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x}dx$

2) $\displaystyle\int ch^2 x dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\,x\ \mathrm{ch}\,x}{3+2\,\mathrm{ch}\,x}dx$

$\displaystyle\int \frac{1}{2+\mathrm{sh}\,x}\,dx$

5.

1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$

6.

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{5-x^2}}\,dx$

2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x+1}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-15/8}^{-3/4} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx$

6) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx$

7) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

8) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{1+2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{(3x-4)(5x-6)}}\,dx$

13) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{6}} \sqrt{2+6x-9x^2}\,dx$

14) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$

16) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x+1}\,dx$

Chapitre 19

Quelques applications des intégrales

On va utiliser les intégrales pour mesurer des volumes, des surfaces non planes et des longueurs de courbe.

Ici a, b représentent des réels et $a < b$.

19.1 Volume et aire d'un solide de révolution

Un **solide de révolution** est obtenu en faisant tourner une courbe plane autour d'une droite (l'*axe de révolution*), la courbe et la droite se trouvant dans un même plan. Envisageons le cas suivant : soit $\mathcal{G}$ la courbe située dans le plan $\boldsymbol{o}yz$ d'équation $y = f(z)$ avec $z \in [a, b]$ supposons $f(z)$ continue et ≥ 0 dans $[a, b]$. Faisons tourner $\mathcal{G}$ autour de l'axe des z, la courbe $\mathcal{G}$ engendre ainsi une surface de révolution, le solide de révolution est délimité latéralement par cette surface ainsi que en bas par un disque de rayon $f(a)$ et en haut par un disque de rayon $f(b)$. Calculons le volume du solide de révolution.

Soient Δz infiniment petit > 0 et $a = z_0\,, z_1\,, z_2\,, \ldots\,, z_k\,, \ldots\,, z_p\,, z_{p+1} = b$ la discrétisation $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ de pas Δz. Par chacun des points $(0, 0, z_k)$ sectionnons le solide de révolution en menant le plan $z = z_k$. Le solide de révolution est ainsi coupé en $p + 1$ tranches de hauteur infiniment petite.

Mesurons le volume de la tranche comprise entre $z = z_k$ et $z = z_{k+1}$, notons V_k ce volume. Utilisons les fonctions de choix Min, Max (voir page 149) qui entre z_k et z_{k+1} choisissent respectivement c_k, d_k tels que $f(c_k)$ et $f(d_k)$ soient respectivement le minimum et le maximum de $f(z)$ pour $z_k \leq z \leq z_{k+1}$. La tranche considérée contient le cylindre de hauteur $z_{k+1} - z_k$ et de rayon $f(c_k)$ et est contenue dans le cylindre de hauteur $z_{k+1} - z_k$ et de rayon $f(d_k)$. Par conséquent

$$\pi f(c_k)^2(z_{k+1} - z_k) \leq V_k \leq \pi f(d_k)^2(z_{k+1} - z_k)\ .$$

Bien entendu la mesure du volume du solide de révolution, notée V_{rev}, est évaluée par $\sum_{k=0}^{p} V_k$. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{p} \pi f(c_k)^2 (z_{k+1} - z_k) \leq V_{rev} \leq \sum_{k=0}^{p} \pi f(d_k)^2 (z_{k+1} - z_k) \ .$$

Ci-dessus on rencontre deux sommes de Riemann relatives à la fonction $z \mapsto \pi f^2(z)$ et aux fonctions de choix Min et Max ; en prenant les parties standard on obtient

$$\int_a^b \pi f(z)^2 dz \leq V_{rev} \leq \int_a^b \pi f(z)^2 dz$$

et donc

$$\boxed{\text{Volume du solide de révolution } = \pi \int_a^b f(z)^2 dz} \ .$$

On peut également chercher l'aire latérale du solide de révolution :

$$\boxed{\text{Aire latérale de la surface de révolution } = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2} dz} \ .$$

On ne démontrera pas ici cette formule [1].

Exemple 19.1 (Cône droit)**.**
Cherchons le volume et l'aire latérale d'un cône droit de hauteur h et dont le rayon à la base est r.

Résolution. Prenons comme axe des z l'axe du cône et plaçons la base du cône dans le plan $\boldsymbol{oxy}$. La surface latérale du cône est alors obtenue en faisant tourner autour de l'axe des z le segment d'extrémités $(0, r, 0)$ et $(0, 0, h)$; dans le plan $\boldsymbol{ozy}$ l'équation de ce segment est

$$y = \frac{r}{h}(h - z) \ .$$

Le volume V_c du cône est donc donné par

$$V_c = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h (h - z)^2 dz = \frac{\pi r^2 h}{3} \ .$$

Pour l'aire latérale A_c du cône A_c on a

$$\begin{aligned} A_c = 2\pi \frac{r}{h} \int_0^h (h - z)\sqrt{1 + (\frac{r}{h})^2} dz \ &= \ 2\pi \frac{r\sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \int_0^h (h - z) dz \\ = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \ &= \ \pi r l \ , \end{aligned}$$

si l est la longueur du segment tournant autour de l'axe des z.

1. on peut trouver cette démonstration par exemple dans [16]

Envisageons maintenant le cas d'une surface de révolution obtenue en faisant tourner une conique autour d'un axe de symétrie. Ainsi un **paraboloïde de révolution** est obtenu en faisant tourner autour de son axe de symétrie une parabole. Un **ellipsoïde de révolution**, resp. **hyperboloïde de révolution**, est obtenu en faisant tourner une ellipse, resp. une hyperbole, autour d'un de ses axes de symétrie. L'hyperboloïde est dit à une nappe si l'axe de rotation est l'axe non transverse, il est dit à 2 nappes si l'axe de rotation est l'axe transverse.

Exemple 19.2 (Ellipsoïde de révolution)**.**
Cherchons le volume et l'aire d'un ellipsoïde de révolution.

Résolution. Soient $2\,a$, $2b$ respectivement les longueurs des axes de l'ellipse. Faisons tourner l'ellipse autour de l'axe de longueur $2a$. Dans $\boldsymbol{o}zy$ l'équation de la demi-ellipse est

$$y = b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}} \qquad \text{avec } -a \le z \le a\,.$$

On a :

$$\text{volume de l'ellipsoïde } = \pi\int_{-a}^{a} b^2\,(1-\frac{z^2}{a^2})\,dz = \pi\left[b^2(z-\frac{z^3}{3a^2})\right]_{-a}^{a} = \frac{4\pi\,a\,b^2}{3}\,.$$

En faisant $a = b = r$, on obtient une sphère de rayon r et on retrouve :

$$\text{volume de la sphère} = \frac{4\,\pi\,r^3}{3}\,.$$

Envisageons le cas $a > b$. Notons $2c$ la distance focale de l'ellipse, c'est-à-dire $c = \sqrt{a^2-b^2}$. On a

$$\begin{aligned}\text{aire de } S_e &= 2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-z^2}\sqrt{1+\frac{z^2b^2}{a^2(a^2-z^2)}}dz\\ &= \frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-c^2z^2}dz\,.\end{aligned}$$

En posant $cz = a^2\sin t$ avec t dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et en notant $\alpha = \arcsin(c/a)$, on obtient

$$\begin{aligned}\text{aire de } S_e &= \frac{2\pi ba^2}{c}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2 t dt = \frac{\pi ba^2}{c}[t+\frac{\sin 2t}{2}]_{-\alpha}^{\alpha}\\ &= \frac{\pi ba^2}{c}(2\alpha+\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}) = \frac{2\pi ba^2}{c}\arcsin\frac{c}{a}+\pi b^2\,. \quad (19.1)\end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas de la sphère de rayon r, on a $a = b = r$ et, au départ de (19.1), on retrouve

$$\text{aire de la sphère} = 4\pi r^2\,.$$

19.2 Longueur d'un arc de courbe

Considérons une courbe plane $\mathcal{C}$ d'équations paramétriques

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad \text{avec } t \in [a, b] \; .$$

Supposons que $x(t)$, $y(t)$ soient continûment dérivable dans $[a, b]$. Cherchons la longueur de la courbe $\mathcal{C}$. Notons $\boldsymbol{p}(t)$ le point $(x(t), y(t))$.

Fixons un hypernaturel m ig. Posons $\Delta t = \frac{b-a}{m}$ et soit $a = t_0 \, , \, t_1 \, , \, t_2 \, , \, \ldots \, , \, t_m = b$ la discrétisation de $[a, b]$ de pas Δt . Pour chaque k, on a $t_k \approx t_{k+1}$ et donc

$$x(t_k) \approx x(t_{k+1}) \;\text{ et }\; y(t_k) \approx y(t_{k+1}) \, , \;\text{ d'où }\; \boldsymbol{p}(t_k) \approx \boldsymbol{p}(t_{k+1}) \; .$$

Evaluons la longueur l_k de l'arc de courbe allant de $\boldsymbol{p}(t_k)$ à $\boldsymbol{p}(t_{k+1})$ au moyen de la longueur s_k du segment allant de $\boldsymbol{p}(t_k)$ à $\boldsymbol{p}(t_{k+1})$; nous avons

$$s_k = \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2} \; . \tag{19.2}$$

Vu le Théorème des accroissements infinitésimaux, 3e partie (page 162), on a :

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = x'(t_k)\Delta t + \varepsilon_k \Delta t \;\text{ et }\; y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(t_k)\Delta t + \varepsilon'_k \Delta t$$

où ε_k, ε'_k sont des ip. En remplaçant dans (19.2) on obtient

$$\begin{aligned} s_k &= \Delta t \sqrt{(x'(t_k) + \varepsilon_k)^2 + (y'(t_k) + \varepsilon'_k)^2} \\ &= \Delta t \sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k)^2 + IP} = \Delta t \, (\sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k)^2} + \varepsilon^*_k) \end{aligned}$$

où ε^*_k est ip.

On évalue donc la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ au moyen de

$$\sum_{k=0}^{m-1} s_k = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta t \sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k)^2} \; + \; \sum_{k=0}^{m-1} \Delta t \, \varepsilon^*_k \; ,$$

Vu le théorème 21, la somme $\sum_{k=0}^{m-1} \Delta t \, \varepsilon^*_k$ est ip et donc :

$$\text{Longueur de } \mathcal{C} = \text{st}(\sum_{k=0}^{m-1} s_k) = \text{st}(\sum_{k=0}^{m-1} \Delta t \sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k)^2}\,) \; .$$

En conclusion

$$\boxed{\text{Longueur de } \mathcal{C} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \; .} \tag{19.3}$$

En particulier considérons le graphe d'une fonction $f(x)$ continûment dérivable dans un intervalle $[a, b]$. Alors les équations paramétriques du graphe s'écrivent

$$x = t \;\; , \;\; y = f(t) \text{ avec } t \in [a, b]$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{Longueur du graphe } = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx} \; .$$

Le raisonnement ci-dessus peut être effectuée pour une courbe de l'espace $\mathbb{R}^3$ et la longueur le l'arc de courbe est alors donnée par

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \; .$$

Exemple 19.3 (Cycloïde)**.**
Cherchons la longueur L_c d'un arc de cycloïde obtenu après un tour complet du cercle.

Résolution. Référons-nous à l'étude de la cycloïde faite à la page 106. Les équations sont

$$\begin{cases} x &= r\theta - r\sin\theta \\ y &= r - r\cos\theta \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi] \qquad .$$

Il s'ensuit

$$L_c = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 8r \; .$$

Exemple 19.4 (Spirale d'Archimède)**.**
Cherchons la longueur L_a de la portion de spirale d'Archimède obtenue après un tour complet.

Résolution. Référons-nous à l'étude de la spirale d'Archimède faite à la page 104. Les équations paramétriques de cette portion de spirale sont

$$\begin{cases} x &= a\theta\cos\theta \\ y &= a\theta\sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi]$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} L_a &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + a^2(\sin\theta + \theta\cos\theta)^2}\, d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta \quad , \end{aligned}$$

d'où, en posant $\theta = \operatorname{sh} t$,

$$\begin{aligned} L_a &= a\int_0^{\operatorname{arcsh}(2\pi)} \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{a}{2}\int_0^{\operatorname{arcsh}(2\pi)} (1+\operatorname{ch} 2t)dt \\ &= \frac{a}{2}(\operatorname{arcsh}(2\pi) + [\frac{\operatorname{sh} 2t}{2}]_0^{\operatorname{arcsh}(2\pi)}) = \frac{a}{2}(\operatorname{arcsh}(2\pi) + \frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{arcsh}(2\pi))}{2})\ . \end{aligned}$$

On sait que $\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$ et que $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}$, il s'ensuit

$$\operatorname{sh}(2\operatorname{arcsh}(2\pi)) = 4\pi\sqrt{1+4\pi^2}$$

et donc

$$L_a = a(\frac{\operatorname{arcsh}(2\pi)}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2})\ .$$

19.3 Exercices

1. Cherchez le volume du solide délimité par
   — l'hyperboloïde de révolution obtenu en faisant tourner l'hyperbole
   $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \ \ , \ \ x = 0$$
   autour de l'axe des z,
   — les plans $z = -h$ et $z = h$.
2. Cherchez le volume du solide obtenu en coupant par le plan $z = a$ le paraboloïde de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe des z. de la parabole d'équations
   $$z = 2py^2 \ \ , \ \ x = 0\ .$$
3. Cherchez la longueur de l'arc de parabole d'équation $y = px^2$ joignant l'origine au point de la parabole d'abscisse $a > 0$.
4. Cherchez la longueur de la courbe "caténaire", c'est-à-dire du graphe de $\operatorname{ch} x$ où $x \in [-a, a]$. (cette courbe s'obtient en suspendant un fil par ses deux extémités, d'où son nom).

Chapitre 20

Equations différentielles du premier ordre

Considérons la fonction exponentielle, notons y cette fonction, alors $y' = y$. Une telle équation est appelée une *équation différentielle du premier ordre*. Il s'agit d'une égalité reliant une fonction à sa dérivée. La fonction exponentielle est une solution de cette équation différentielle, une solution d'une équation différentielle est donc une fonction qui vérifie l'égalité considérée. Remarquons que l'équation $y' = y$ a d'autres solutions, ainsi si C représente une constante quelconque, la fonction Ce^x est aussi solution de $y' = y$, par exemple $2e^x$, $5e^x$, ...sont des solutions de $y' = y$. Chacune de ces fonctions sera appelée une *solution particulière* de $y' = y$. On verra bientôt que toute solution de $y' = y$ est de la forme Ce^x, dès lors en posant $y = Ce^x$ où C représente une constante arbitraire, on aura toutes les solutions et uniquement les solutions de $y' = y$, aussi on dira que la formule $y = Ce^x$ donne la *solution générale* de $y' = y$.

20.1 Quelques généralités

Ici on désigne souvent par y la fonction inconnue d'une équation différentielle, la variable est souvent notée x, mais dans les applications il en est tout autrement, par exemple, quand la varable est le temps, la variable est notée t et si la grandeur étudiée est une intensité électrique, on remplacera y par I ....

Une équation différentielle du premier ordre est une équation reliant y' à x et y, on y trouve éventuellement y et la variable x , mais nécessairement la dérivée de y. Résoudre une équation différentielle consiste à chercher toutes les fonctions $y(x)$ qui la vérifient et qui sont des fonctions continûment dérivables dans un certain intervalle (pouvant dépendre de la solution y).

Ce que nous avons déjà remarqué ci-dessus avec l'équation $y' = y$, se confirmera par la suite : on verra qu'une équation différentielle a une infinité de solutions et que ces fonctions solutions peuvent être décrites au moyen d'un paramètre, appelé ici constante arbitraire ; il s'agit là d'une règle générale valable pour toutes les équations différentielles du premier ordre.

Souvent on cherche une solution précise de l'équation différentielle vérifiant une condition supplémentaire de la forme $y(x_0) = y_0$ où x_0, y_0 ont des valeurs fixées et connues, une condition de la forme $y(x_0) = y_0$ est appelée une **condition initiale**.

Considérons une équation différentielle

$$F(y', y, x) = 0 \qquad (*) \ .$$

A toute solution y de (*) correspond son graphe qui est appelé une **trajectoire solution** de (*). Une équation différentielle a donc aussi une signification géométrique : comme on le verra au travers d'exemples, elle représente aussi une infinité de trajectoires dans le plan. Remarquons que la condition initiale $y(x_0) = y_0$ consiste à imposer à la trajectoire-solution de passer par le point (x_0, y_0).

Une **solution particulière** de l'équation différentielle $(*)$ est une fonction y vérifiant l'équation $(*)$. La **solution générale** de $(*)$ dans I est une expression qui caractérise toutes les solutions de $(*)$ dans I, il s'agit donc d'une formule représentant toutes les solutions de $(*)$ dans I et rien que des solutions de $(*)$, souvent on la représentera par la notation y_g . Il faut toutefois apporter un correctif à cela : dans certains cas on verra qu'un nombre très limité de solutions de $(*)$ échappent à la formulation générale donnant toutes les autres solutions, alors ces solutions seront appelées des solutions **singulières** de $(*)$ et la formulation générale gardera le nom de solution générale.

Sauf mention explicite du contraire on cherchera des solutions à valeurs réelles et les constantes arbitraires que nous rencontrerons alors seront des réels quelconques. Cependant on verra aussi qu'il est parfois utile et plus simple de considérer des solutions à valeurs complexes.

Conventions :
$y \equiv a$ signifie que $y(x) = a$ pour tout x et “ssi” est l'abréviation de “si et seulement si”.

20.2 Equations à variables séparées

Il s'agit des équations de la forme

$$\boxed{f(y).y' = g(x)} \qquad (S) \ .$$

Pour résoudre (S) on remarque qu'en se plaçant dans un intervalle où la solution y serait continûment dérivable, on a :

$$\begin{aligned} f(y).y' = g(x) \quad & \text{ssi} \quad \int f(y).y'dx \simeq \int g(x)dx \\ & \text{ssi} \quad \int f(y)dy \simeq \int g(x)dx \\ & \text{ssi} \quad \int f(y)dy = \int g(x)dx + C \ , \end{aligned}$$

où C est une constante arbitraire. Après le calcul des primitives , on obtient une définition implicite des solutions y, c'est-à-dire une égalité reliant x et y ; il s'agit alors de transformer cette définition implicite en une définition explicite de y, c'est-à-dire d'obtenir une formule donnant y en fonction de x.

Souvent il est impossible de prévoir dès le début des calculs l'ensemble dans lequel on va obtenir les solutions mais, lorsque les solutions sont obtenues, on peut alors déterminer l'ensemble dans lequel ces solutions sont valables.

Exemple 20.1. *Cherchons la solution générale de*

$$y\,y' + \sin x = 0 \tag{20.1}$$

Résolution. On a :

$$\begin{aligned} y\,y' = -\sin x \quad & \text{ssi} \quad \int y\,dy = -\int \sin x dx + C \\ & \text{ssi} \quad \frac{y^2}{2} = \cos x + C \\ & \text{ssi} \quad y = \pm\sqrt{2\cos x + 2C} \end{aligned}$$

où C est une constante arbitraire. La solution générale y_g de (20.1) s'écrit donc

$$y_g = \pm\sqrt{2\,\cos x + K}\,, \tag{20.2}$$

a priori K est une constante arbitraire réelle mais vu la forme de y_G, la constante K doit être un réel > -2.

Prenons la constante $K > -2$. Remarquons d'abord que la solution de (20.1) est périodique de période 2π. Examinons où cette solution est valable. Si $K > 2$, la solution donnée par (20.2) est valable dans $\mathbb{R}$ tout entier. Mais si $-2 < K \leq 2$, il faut déterminer quand $2\cos x + K > 0$; vu la périodicité des solutions, on peut se limiter à étudier ces solutions dans $[-\pi, \pi]$, alors on doit avoir $\cos x > -K/2$ et donc x doit être dans

$$]-\arccos(-\frac{K}{2}), \arccos(-\frac{K}{2})[\ .$$

Sur la figure 20.1, on a représenté dans $[-\pi, \pi]$ les trajectoires-solutions correspondants au cas $+$ et en prenant pour K les valeurs -1, 0, 0.5, 1, 2, 4 ; en observant ces dessins, on a confirmation de ce qu'on vient de dire à propos de l'ensemble de validité des solutions.

Complétons le problème posé en recherchant le(s) solutions de 20.1 vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$. Il faut donc sélectionner parmi toutes les solutions représentées par la solution générale celle(s) qui vérifient $y(0) = 1$, il faut donc prendre le cas du $+$ et cela donne

$$1 = 2 + K$$

et donc $K = -1$, la solution particulière cherchée est donc donnée par

$$y = \sqrt{2\cos x - 1}\ .$$

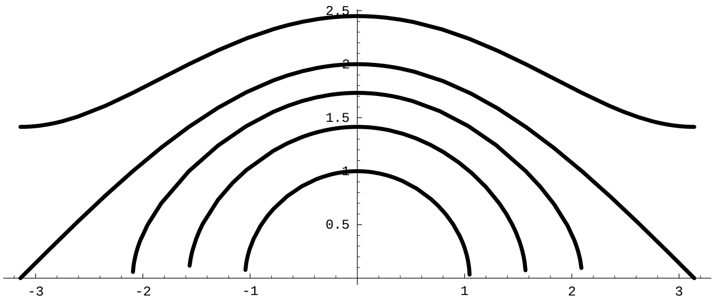


FIGURE 20.1: trajectoires-solutions de 20.1 dans $[-\pi, \pi]$

Exemple 20.2. *Cherchons la solution générale de*

$$x^2 y' = y^2 \tag{20.3}$$

Résolution. Remarquons d'abord que $y \equiv 0$ est une solution de (20.3).
Envisageons le cas $y \not\equiv 0$. Alors

$$\begin{aligned} x^2 y' = y^2 \quad & \text{ssi} \quad \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\ & \text{ssi} \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} + C \\ & \text{ssi} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - C \\ & \text{ssi} \quad y = \frac{x}{1 - Cx} \end{aligned}$$

où C est une constante arbitraire. Les solutions obtenues ici sont donc

$$y = \frac{x}{1 - Cx}$$

La solution $y \equiv 0$ ne peut se mettre sous la forme ci-dessus. Par conséquent $y \equiv 0$ est dite une solution singulière de (20.3) et la solution générale de (20.3) est donnée par :

$$y_g = \frac{x}{1 - Cx} \tag{20.4}$$

Examinons les trajectoires-solutions :

— Deux trajectoires-solutions font bande à part : la trajectoire-solution de la solution singulière qui est l'axe des x et aussi la trajectoire-solution correspondant à $C = 0$ qui est la droite $y = x$.

— Les autres trajectoires-solutions sont des hyperboles dont les asymptotes sont l'horizontale $y = -1/C$ et la verticale $x = 1/C$, de plus toutes ces hyperboles passent par l'origine.

Sur la figure (20.2) on a représenté quatre trajectoires-solutions de (20.3) correspondants à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ où $x_0 = -2, 1$ et $y_0 = -1, 4$. Ces conditions initiales correspondent aux valeurs suivantes de C :

$y_0 \diagdown x_0$	-2	1
-1	$C = 1/2$	$C = 2$
4	$C = -3/4$	$C = 3/4$

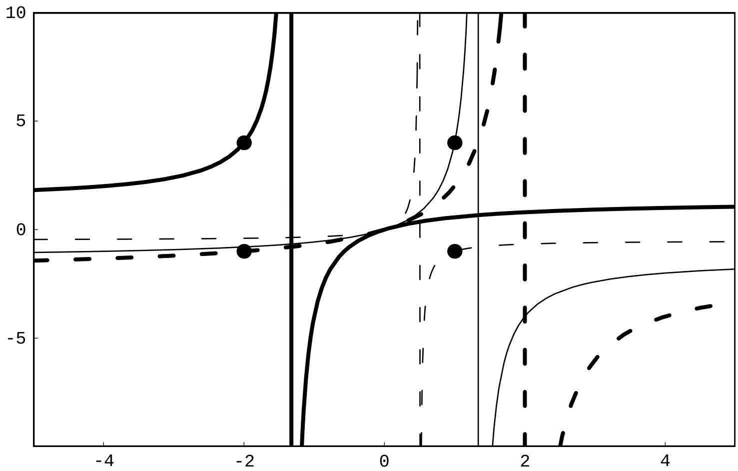


FIGURE 20.2: trajectoires-solutions de (20.3)

Exemple 20.3. *Cherchons la solution de*

$$y' = y(y-1) \tag{20.5}$$

vérifiant la condition initiale

$$y(0) = 2\ . \tag{20.6}$$

Résolution. Cherchons d'abord la solution générale y_g de 20.5
1) $y \equiv 0$ et $y \equiv 1$ sont deux solutions particulières de (20.5).
2) Envisageons $y \not\equiv 0$ et $y \not\equiv 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} y' = y(y-1) \quad & \text{ssi} \quad \int \frac{dy}{y(y-1)} \simeq \int dx \\ & \text{ssi} \quad \ln \mid \frac{y-1}{y} \mid = x + C \\ & \text{ssi} \quad \mid \frac{y-1}{y} \mid = e^{x+C} \end{aligned}$$

où C est une constante réelle quelconque. Posons $C_1 = \pm e^C$. La constante C_1 représente donc un réel non nul arbitaire. Nous avons :

$$\frac{y-1}{y} = C_1 e^x$$

d'où

$$y = \frac{1}{1 - C_1 e^x}$$

3) Conclusion. En prenant $C_1 = 0$ nous pouvons récupérer dans la solution générale la solution particulière $y \equiv 1$. La solution générale de (20.5) s'écrit donc :

$$y_g = \frac{1}{1 - Ce^x} \tag{20.7}$$

C étant une constante arbitraire réelle, de plus $y \equiv 0$ est une solution singulière de (20.5).

Cherchons maintenant la solution particulière y_p vérifiant la condition initiale (20.6). La solution singulière $y \equiv 0$ ne convient pas. Il faut :

$$2 = \frac{1}{1 - C}$$

c'est-à-dire $C = 1/2$, la solution particulière cherchée est donc donnée par

$$y = \frac{2}{2 - e^x} \ ,$$

cette solution est valable dans $]-\infty, \ln 2[\cup] \ln 2, +\infty[$.

Revenons à la solution générale (20.7) et déterminons l'allure des trajectoires solutions lorsque $C \neq 0$.

1. Si x est ig > 0, on a $y_g(x) \approx 0$ et si x est ig < 0, on a $y_g(x) \approx 1$; les trajectoires-solutions ont donc deux asymptotes horizontales :
   $y = 0$ du côté $+\infty$ et $y = 1$ du côté $-\infty$.
2. Remarquons :
   — si $C < 0$, la solution est valable dans $\mathbb{R}$ tout entier ;
   — si $C > 0$, la solution est valable dans $]-\infty, \ln C[\cup] \ln C, +\infty[$ et présente en $\ln C$ une asymptote verticale, puisque $x \approx \ln C$ et $x \neq \ln C$ entraîne $y_g(x)$ infiniment grand.
3. De plus
   $$y_g'(x) = \frac{Ce^x}{(1 - Ce^x)^2} \ ,$$
   la dérivée est de signe constant à savoir le signe de C ; la solution y_g est donc strictement décroissante dans $\mathbb{R}$ si $C < 0$ et si $C > 0$, elle est strictement croissante dans $]-\infty, \ln C[$ et strictement décroissante dans $] \ln C, +\infty[$.

Cela permet d'esquisser les trajectoires-solutions, sur la figure 20.3, on a représenté les trajectoires-solutions de (20.5) correspondant aux valeurs de la constante arbitraire $C = -1, 0, 0.5, 2$.

20.3 L'exponentielle comme solution d'une équation différentielle

Considérons l'équation différentielle

$$y' = ay \tag{20.8}$$

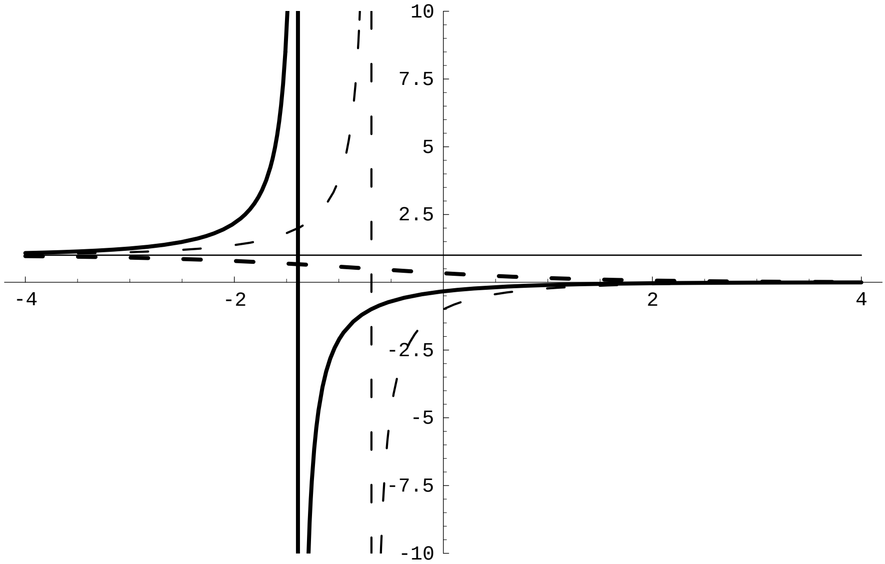


FIGURE 20.3: trajectoires-solutions de (20.5) pour $C = -1, 0, 0.5, 2$

où a est une constante réelle.

Résolvons cette équation. Remarquons d'abord que $y \equiv 0$ est solution de (20.8). Considérons $y \not\equiv 0$. Alors (20.8) est équivalent à

$$\frac{y'}{y} = a$$

c'est-à-dire à

$$\ln |y| = ax + C$$

où C est une constante réelle quelconque. On obtient ainsi

$$y = \pm e^{ax+C} = \pm e^C e^{ax} = Ke^{ax}$$

où $K = \pm e^C$ et représente donc une constante réelle quelconque non nulle. En se rappelant que $y \equiv 0$ est une solution, on obtient :

la solution générale y_g de (20.8) s'écrit

$$\boxed{y_g = Ce^{ax}} \tag{20.9}$$

où C est une constante réelle quelconque.

La constante C s'exprime au moyen de la condition initiale, on a $y(0) = C$ et la solution de (20.8) devient

$$\boxed{y = y(0)e^{ax}} \tag{20.10}$$

Plus généralement si la valeur initiale de la variable est x_0 , on a

$$y(x_0) = Ce^{ax_0}$$

et la solution de (20.8) s'écrit alors

$$y = y(x_0)e^{a(x-x_0)}$$

20.4 Premières applications de $y' = ay$

L'équation (20.8) se présente dans de nombreuses applications. Ici la variable est le temps et est notée t .

Evolution de la radioactivité

Considérons un élément radioactif et notons $r(t)$ sa radioactivité à l'instant t. Soit Δt une variation de temps très petite, on assimile Δt à une variation infiniment petite. Δt devient notre infiniment petit de référence.

Sur base d'observations, le physicien formule la règle :

la diminution de radioactivité Δr correspondant à la variation de temps Δt peut être estimée comme étant proportionnelle à la radioactivité totale.

Mais bien entendu

cette diminution de radioactivité doit aussi être proportionnelle à Δt.

Autrement dit, k étant une constante > 0 dépendant de l'élément radioactif considéré, on observe Δr comme étant $-kr\Delta t$. Mais les mesures traduisant les observations ne sont pas exactes ; puisque Δt est ici notre infiniment petit de référence, les quantités observées comme nulles sont $o(\Delta t)$, et donc la différence entre les mesures effectuées et les grandeurs réelles correspondantes sont $o(\Delta t)$. On a donc

$$\boxed{\Delta r = -kr\Delta t + o(\Delta t)} \,.$$

Par conséquent

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -kr + \frac{o(\Delta)}{\Delta t} = -kr + IP$$

d'où

$$r'(t) = \mathrm{st}(\frac{\Delta r}{\Delta t}) = -kr \,.$$

Ainsi la radioactivité vérifie l'équation

$$\boxed{r' = -kr}$$

qui est une équation de la forme (20.8). La radioactivité $r(t)$ est donc donnée par

$$r(t) = r(0)e^{-kt} \,.$$

Cherchons la *demi-vie* d'un élément radioactif c'est-à-dire le temps nécessaire pour que l'élément radioactif perde la moitié de sa radioactivité, notons $t_{1/2}$ la demi-vie de l'élément radioactif. On a

$$r(t + t_{1/2}) = \frac{1}{2}r(t)$$

ce qui donne

$$e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

et donc

$$t_{1/2} = \frac{ln2}{k}$$

Il faut remarquer que la demi-vie dépend seulement de k et ne dépend ni de $r(0)$ ni du temps t considéré.

Evolution d'une population, premier modèle

Considérons une population. Les "individus" peuvent être des hommes, des animaux mais aussi des bactéries, des molécules ..., les mots "population" et "individu" couvrent donc ici des situations fort variées. On étudie ici l'évolution dans le temps de l'effectif de cette population, c'est-à-dire de son nombre d'individus et on envisage cet effectif comme une fonction du temps t. Notons $p(t)$ l'effectif de la population considérée. L'instant initial considéré est donné par $t = 0$.

Dans le premier modèle, le plus simple, *le seul facteur influençant l'évolution de la population est l'effectif total de la population.* Alors, lorsqu'on prend une variation de temps Δt petite que nous assimilons à une variation Δt infiniment petite, la variation de la population Δp est observée comme étant simplement proportionnel à l'effectif total p et bien entendu à Δt. Alors, comme ci-dessus, on a

$$\boxed{\Delta p = rp\Delta t + o(\Delta t)}$$

où r est une constante (> 0 ou < 0 suivant que la population croît ou décroît). d'où il découle

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = rp + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = rp + IP\ .$$

En prenant la partie standard, on obtient

$$\boxed{p' = rp} \tag{20.11}$$

Il s'agit là du premier modèle d'évolution d'une population.

On est en présence d'une équation différentielle de la forme (20.8). La solution de (20.11) est donc

$$p = p(0)e^{rt} \tag{20.12}$$

Evolution de la température d'un corps

Considérons un corps plongé dans un milieu dont la température est constante et vaut T_0, ici la température du milieu extérieur est supposée ne pas être influencée par le corps plongé dans ce milieu et est donc constante. Etudions l'évolution de la température T du corps. Considérons une variation de temps Δt infinitésimale. Alors la variation ΔT est observée comme étant proportionnelle à la différence entre la température T et la température T_0 du milieu extérieur et bien entendu aussi à Δt , on a donc

$$\Delta T = r(T_0 - T)\Delta t + o(\Delta t)$$

où r est une constante > 0. En procédant comme plus haut on obtient

$$T' = r(T_0 - T)\ .$$

Il s'ensuit

$$(T - T_0)' = r(T_0 - T)$$

qui est encore une équation de la forme (20.8). Par conséquent

$$T - T_0 = (T(0) - T_0)e^{-rt}$$

d'où

$$T = T_0 + (T(0) - T_0)e^{-rt}$$

20.5 Evolution d'une population, 2^e modèle

Souvent l'évolution d'une population n'est pas simplement exponentielle, la croissance ou la décroissance est limitée et subit un ajustement, c'est le cas si au second membre de l'équation (20.12) on ajoute un terme dû à des "migrations" : plus la population augmente, plus d'individus quittent la population pour aller ailleurs, plus la population diminue plus des individus venant de l'extérieur intègrent la population. Un modèle fréquemment retenu est alors donné par :

$$\boxed{p' = rp(1 - \frac{p}{K})} \tag{20.13}$$

où r et K sont des constantes > 0.

Résolvons (20.13). Remarquons d'abord que $p \equiv 0$ et $p \equiv K$ sont des solutions de (20.13). Considérons maintenant $p \not\equiv 0$ et $p \not\equiv K$. On obtient

$$\int \frac{dp}{p(1 - \frac{p}{K})} = \int r dt + C\ .$$

Puisque

$$\frac{1}{p(1 - \frac{p}{K})} = \frac{1}{p} + \frac{1}{K - p}$$

on a

$$\ln\left|\frac{p}{K - p}\right| = rt + C$$

où C est une constante réelle arbitraire. Il s'ensuit

$$\frac{p}{K - p} = \pm e^C e^{rt}$$

où $\pm e^C$ représente un réel quelconque $\neq 0$.

En conclusion, en se rappelant les solutions $p \equiv 0$ (sans intérêt), $p \equiv K$, on a que la solution générale de (20.13) s'écrit

$$p = \frac{KCe^{rt}}{1 + Ce^{rt}} = \frac{KC}{C + e^{-rt}}$$

où C est une constante réelle quelconque, de plus $p \equiv K$ est une solution singulière de (20.13).

Exprimons C en fonction de la condition initiale $p(0)$:

$$p(0) = \frac{KC}{C+1}$$

d'où, si $p(0) \neq K$,

$$C = \frac{p(0)}{K - p(0)} \ .$$

On obtient finalement

$$p = \frac{Kp(0)}{p(0) + (K - p(0))e^{-rt}} \ . \tag{20.14}$$

avec la condition $p(0) \neq K$.

Interprétation de la solution

Etudions (pour $t \geq 0$) les solutions données par (20.14) autres que la solution $p \equiv 0$ sans intérêt. En prenant t infiniment grand positif, la fraction (20.14) est le rapport d'un réel sur un appréciable et en prenant la partie standard on trouve K, il s'ensuit

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = K \ .$$

De plus

$$p'(t) = \frac{K\, r\, p(0)\, (K - p(0))e^{-rt}}{(p(0) + (K - p(0))e^{-rt})^2} \ ,$$

d'où $p'(t)$ est de signe constant, à savoir le signe de $(K - p(0))$. Il s'ensuit :

— si $K > p(0)$, l'effectif $p(t)$ est strictement croissant et tend vers K,

— si $K < p(0)$, l'effectif $p(t)$ est strictement décroissant et tend vers K .

Ainsi lorsque $p(0) \neq K$, la population tend de façon monotone vers son effectif d'équilibre. Remarquons qu'alors l'effectif vers lequel tend la population est indépendant de l'effectif initial $p(0)$.

Que se passe-t-il, si $p(0) = K$?

Il faut alors utiliser la solution singulière $p(t) \equiv K$, alors l'effectif de la population reste constant, cette solution est dès lors appelée la solution d'équilibre et K est l'effectif d'équilibre.

Sur la figure 20.4, dans le cas $r = 0,2$ et $K = 10000$, on a envisagé les trois cas possibles : $p(0) = 10000$ (effectif constant), $p(0) = 5000$ (effectif croissant) et $p(0) = 15000$ (effectif décroissant)

Exemple 20.4. *On considère la population soumise au modèle suivant :*

$$p' = p(1 - 2p) \ , \ p(0) = 1 \ .$$

Cherchez $p(t)$ et ensuite étudiez $p(t)$.

Résolution.

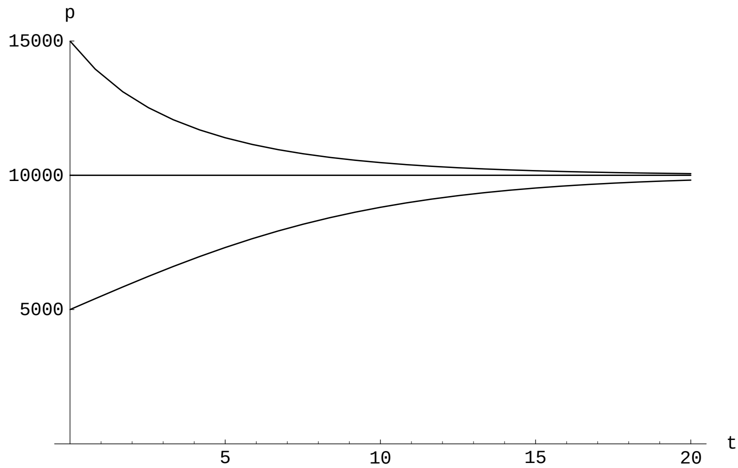
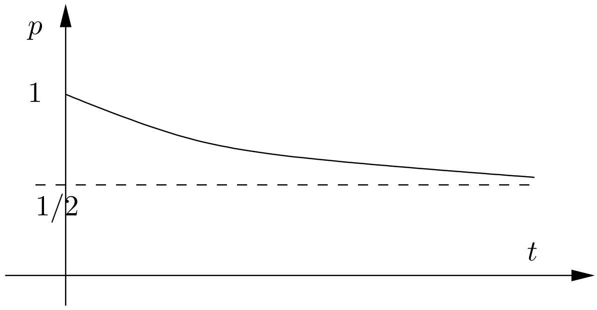


FIGURE 20.4: évolution d'une population, 2^{e}modèle, les 3 cas possibles

1. On résout d'abord $p' = p(1-2p)$. En procédant comme ci-dessus on obtient la solution générale
$$p(t) = \frac{C}{2C + e^{-t}}$$
où C est une constante arbitraire, de plus $p(t) \equiv K$ est une solution singulière. On cherche maintenant la constante C grâce à la condition initiale $p(0) = 1$, on doit avoir
$$1 = \frac{C}{2C+1}$$
et donc $C = -1$. La solution est donc
$$p(t) = \frac{1}{2 - e^{-t}} \ .$$

2. Etudions cette solution.
   (a) Si t est ig > 0, l'expression e^{-t} est ip et donc $p(t) = \frac{1}{AP}$ d'où $\mathrm{st}(p(t)) = \frac{1}{2}$ et $p(t) \approx \frac{1}{2}$. On a ainsi prouvé
   $$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \frac{1}{2} \ ;$$
   Il y a donc une asymptote horizontale $p = 1/2$.
   (b) On cherche la dérivée
   $$p'(t) = \frac{-e^{-t}}{(2 - e^{-t})^2} \ ,$$
   La dérivée $p'(t)$ est donc < 0 et $p(t)$ est donc strictement décroissante.
   (c) On peut maintenant tracé le graphe



(d) En conclusion, la population $p(t)$ décroît constamment en tendant vers la valeur $\frac{1}{2}$.

20.6 Equation logistique

L'équation (20.13) est un cas particulier d'une équation plus générale appelée **équation logistique**, la forme générale de l'équation logistique est

$$y' = (b - ay)(d - cy) \tag{20.15}$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles. Cette équation se résout par la même méthode que l'équation (20.13). On rencontre des équations de cette forme dans de nombreuses applications. Ainsi

Exemple 20.5. *Considérons une réaction chimique se présentant sous la forme*

$$A + B \longrightarrow C \ .$$

Notons a, b les concentrations initiales en A, resp. B. Alors la concentration en C, notée $c(t)$ évolue suivant le modèle suivant :

$$c' = k(a - c)(b - c) \tag{20.16}$$

où k est une constante > 0. On suppose qu'en $t = 0$ la concentration en C est nulle.

Résolution. Lorsque $a \neq b$, en résolvant l'équation (20.16) et la condition initiale $c(0) = 0$, on obtient

$$c = ab\frac{e^{k(a-b)t} - 1}{ae^{k(a-b)t} - b} \ .$$

Remarquons : si $a < b$, alors $\lim_{t\to+\infty} c(t) = a$ et, si $a > b$, on a $\lim_{t\to+\infty} c(t) = b$.

20.7 Evolution d'une population, 3^e modèle

A titre informatif voici un troisième type d'évolution de population. Le modèle décrit par (20.13) doit dans certains cas être modifié ou amélioré, c'est le cas lorsque l'évolution de la population est soumise en plus à un facteur "prédateur", alors l'équation différentielle devient

$$p' = rp + \text{migration}(p) + \text{prédateurs}(p) \ .$$

En voici un exemple :

au Canada le modèle retenu pour décrire l'évolution de la population d'un ver bien particulier s'attaquant aux bourgeons des épicéas (et faisant de lourds dégâts forestiers) est de la forme suivante

$$p' = rp(1 - \frac{p}{K}) - \frac{Bp^2}{A^2 + p^2}$$

où r, K, A, B sont des constantes > 0. Le terme $Bp^2/(A^2 + p^2)$ est la contribution "prédateur" qui s'explique ici par le fait que des oiseaux détruisent une partie de la population des vers.

Cette équation est encore à variable séparée mais est plus difficile à résoudre (de façon symbolique) du fait qu'elle va faire apparaître une primitive nettement plus compliquée. On ne traitera pas ce cas ici.

20.8 Equations différentielles linéaires, propriétés générales

Les équations différentielles linéaires, quel que soit leur ordre (en pratique du premier ou du second ordre) jouissent de propriétés communes remarquables. C'est de ces propriétés dont on traite ici.

Pour représenter les équations différentielles linéaires sous une même forme il est commode d'utiliser un **opérateur de dérivation** : un opérateur de dérivation est une opération qui s'applique à des fonctions et qui , au moyen notamment de l'opération de dérivation notée D , transforme ces fonctions. Ainsi $D + 3$, $2D - 3x$, $D^2 - 1$, $D^2 - xD + 1$ sont des exemples d'opérateurs de dérivation qui transforment une fonction y de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl}(D+3)y &=& y' + 3y \\ (2D - 3x)y &=& 2y' - 3xy \\ (D^2 - 1)y &=& y'' - y \\ (D^2 - xD + 1)y &=& y'' - xy' + y\end{array}$$

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme

$$\boxed{y' + a(x)y = f(x)} \quad (L_1) .$$

En considérant l'opérateur de dérivation $L(x, D)$ défini par

$$L(x, D) := D + a(x) \tag{20.17}$$

l'équation (L_1) s'écrit :

$$L(x, D)y = f(x) . \qquad (L)$$

Une équation différentielle linéaire du second ordre est de la forme

$$\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)} \quad (L_2) .$$

En considérant cette fois l'opérateur

$$L(x, D) := D^2 + a(x)D + b(x) \tag{20.18}$$

l'équation (L_2) s'écrit alors également sous la forme (L) ci-dessus.

Soit I l'intervalle dans lequel on désire obtenir les solutions de (L) On suppose toujours que

1. *$a(x)$, $b(x)$ (pour le second ordre) sont continus dans I et sont à valeurs réelles,*
2. *$f(x)$ est continu dans I et $f(x)$ est à valeurs complexes, pas nécessairement réelles.*

Ci-dessous $L(x, D)$ désigne aussi bien l'opérateur défini par (20.17) ou (20.18), rappelons qu'alors les équations (L_1) et (L_2) s'écrivent toutes deux sous la forme (L), autrement dit

$$L(x, D)y = f(x) \ . \qquad (L)$$

L'opérateur $L(x, D)$ opère de façon linéaire sur les fonctions. En effet une vérification élémentaire nous donne :

Théorème 51 (Linéarité de l'opérateur)**.**
L'opérateur $L(x, D)$ est linéaire autrement dit

$$L(x, D)(\lambda y) = \lambda L(x, D)y \qquad (\lambda \textit{ constante}),$$
$$L(x, D)(y_1 + y_2) = L(x, D)y_1 + L(x, D)y_2.$$

De plus

$$L(x, D) \operatorname{Re} y = \operatorname{Re}(L(x, D)y) \ \textit{ et } L(x, D) \operatorname{Im} y = \operatorname{Im}(L(x, D)y) \ .$$

Voilà pourquoi les équations différentielles (L_1) et (L_2) sont qualifiées de linéaires. De là il va découler des propriétés importantes quant aux solutions de ces équations.

Théorème 52 (Principe de superposition)**.**
Si y_1 est une solution de $L(x, D)y = f_1(x)$ et si y_2 est une solution de $L(x, D)y = f_2(x)$, alors

λy_1 est une solution de $L(x, D)y = \lambda f_1(x)$ (λ étant une constante),

$y_1 + y_2$ est une solution de $L(x, D)y = f_1(x) + f_2(x)$,

$\operatorname{Re} y_1$, *resp.* $\operatorname{Im} y_1$, *est solution de* $L(x, D)y = \operatorname{Re} f_1(x)$, *resp. de* $L(x, D)y = \operatorname{Im} f_1(x)$.

En effet

$$L(x, D)(y_1 + y_2) = L(x, D)y_1 + L(x, D)y_2 = f_1(x) + f_2(x)$$

et

$$L(x, D) \operatorname{Re} y = \operatorname{Re}(L(x, D)y) = \operatorname{Re} f(x) \ .$$

L'équation

$$L(x, D)y = 0 \qquad\qquad (H)$$

est appelée l'**équation homogène** associée à (L) . Comme on va le voir cette équation joue un rôle fondamental. Remarquons : la somme de deux solutions de (H) est solution de (H) et si on multiplie une solution de (H) par une constante on a encore une solution de (H), par conséquent : *les solutions l'équation homogène forment un espace vectoriel* (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ suivant qu'on prend les solutions à valeurs réelles ou à valeurs complexes).

La structure des solutions des équations différentielles linéaires est régie par le résultat suivant :

Théorème 53 (Structure de la solution générale)**.**
Soient

y_h *la solution* générale *de* $L(x, D)y = 0$ *,*

y_p *une solution* particulière *de* $L(x, D)y = f(x)$*.*

Alors

$y_h + y_p$ *est la solution* générale *de* $L(x, D)y = f(x)$*.*

Démonstration.
1. D'après le théorème 52 , toute solution de la forme $y_h + y_p$ est solution de $L(x, D)y = f(x)$.
2. Soit y_1 une solution particulière de $L(x, D)y = f(x)$. En appliquant le théorème 52, nous voyons que $y_1 - y_p$ est une solution de $L(x, D)y = 0$. Par conséquent $y_1 - y_p$ se met donc sous la forme y_h , d'où y_1 se met sous la forme $y_h + y_p$. □

De là découle la méthode pour chercher la solution générale de (L), elle comporte trois étapes :

1. *la recherche de la solution générale* y_h *de* (H)*,*
2. *la recherche d'une solution particulière* y_p *de* (L)*,*
3. *la conclusion :* $y_h + y_p$ *est alors la solution générale de* (L)*.*

20.9 Equations différentielles linéaires du premier ordre

L'équation différentielle considérée est

$$\boxed{y' + a(x)y = f(x)} \quad (L)\ .$$

Rappelons que $a(x)$, $f(x)$ *sont continus dans un intervalle* I *et que* $a(x)$ *est nécessairement à valeurs réelles.*

Voyons d'abord comment chercher la solution générale de l'équation homogène

$$\boxed{y' + a(x)y = 0} \quad (H)$$

et ensuite comment chercher une solution particulière de (L).

Recherche de la solution générale de (H)

Notation. Convenons de désigner par $\boldsymbol{\int_p f(x)dx}$ *une primitive* de $f(x)$ choisie par l'utilisateur, dans $\int_p f(x)dx$ on ne retrouve donc aucune constante arbitraire.

Théorème 54 (Solution générale de l'équation homogène)**.**
Posons

$$w(x) := e^{-\int_p a(x)dx} .$$

Alors

— *$w(x)$ est une solution particulière dans I de (H) et $w(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.*
— *la solution générale y_h de (H) dans I s'écrit*

$$y_h = Cw(x)$$

autrement dit

$$\boxed{y_h = Ce^{-\int_p a(x)dx} .}$$

où C est une constante arbitraire (réelle ou complexe suivant qu'on cherche la solution générale à valeurs réelles ou complexes)

Démonstration. Cherchons d'abord la solution générale dans I à valeurs réelles. Remarquons que $y \equiv 0$ est une solution particulière de (H). Envisageons le cas $y \not\equiv 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 \quad & \text{ssi} \quad \frac{y'}{y} = -a(x) \\ & \text{ssi} \quad \ln|y| \simeq -\int a(x)dx \\ & \text{ssi} \quad \ln|y| = -\int_p a(x)dx + C \\ & \text{ssi} \quad y = \pm e^C \cdot e^{-\int_p a(x)dx} \end{aligned}$$

où C est une constante réelle quelconque. L'expression $\pm e^C$ représente une constante arbitraire C_1 non nulle, par conséquent

$$y' + a(x)y = 0 \text{ ssi } y = C_1 w(x) .$$

Il faut remarquer que la primitive de $a(x)$ existe dans I car $a(x)$ est continu dans I, de plus la solution y est $\neq 0$, par conséquent on peut ci-dessus diviser par y ; la solution y obtenue est donc valable dans l'intervalle I tout entier.

En nous rappelant la solution $y \equiv 0$, on a que la solution générale de (H) est $y = Cw(x)$ avec C constante réelle quelconque.

Pour obtenir la solution générale à valeurs complexes de (H), notée par exemple y_h^c, on remarque que que la partie réelle et la partie imaginaire de y_h^c sont solutions de (H) à valeurs réelles, d'où

$$y_h^c(x) = C_1 w(x) + iC_2 w(x) = (C_1 + iC_2)w(x)$$

où C_1, C_2 sont des constantes réelles quelconques. □

Remarquons :

1. le résultat ci-dessus généralise la formule (20.10) qui donnait la solution générale de $y' - ay = 0$.
2. *l'espace vectoriel des solutions de* (H) *est un espace vectoriel de dimension* 1 puisque toutes les solutions de (H) sont multiples de $w(x)$.

Recherche d' une solution particulière de (L)

Soit w la solution particulière de (H) trouvée ci-dessus. On pose $y = w \cdot u$ et on cherche u pour que y soit solution de (L). En remplaçant dans (L), on obtient

$$wu' + u\underbrace{(w' + a(x)w)}_{=0} = f(x)$$

d'où, puisque $w(x) \neq 0$ dans I

$$u' = \frac{f(x)}{w(x)} ,$$

la fraction $\frac{f(x)}{w(x)}$ est continue dans I et admet donc une primitive dans I. Il suffit donc de choisir pour u une primitive particulière de $\frac{f(x)}{w(x)}$, autrement dit

$$u = \int_p \frac{f(x)}{w(x)} .$$

Pour obtenir y_p solution particulière de (L) dans I on prend

$$y_p = w \cdot u .$$

Conclusions

Ainsi on peut chercher une solution particulière de l'équation (L) dans I. En ajoutant cette solution particulière à la solution générale de l'équation homogène (également valable dans I), on obtiendra la solution générale de l'équation (L) valable dans l'intervalle I tout entier. Remarquons qu'il n'y a pas ici de solution singulière. On sait que la constante arbitraire peut s'exprimer au moyen d'une condition initiale, précisons comment cette condition initiale peut être choisie.

Théorème 55. *Pour tout $x_0 \in I$ et tout réel y_0, il existe UNE et UNE SEULE solution de (L) dans I tel que*

$$y(x_0) = y_0.$$

Par conséquent par tout point du plan dont l'abscisse est dans I il passe une et une seule trajectoire-solution de (L).

Démonstration. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit y_p une solution particulière de (L) valable dans I. La solution générale de (L) est :

$$y = Cw + y_p.$$

La condition nécessaire et suffisante pour obtenir une solution de (L) vérifiant $y(x_0) = y_0$ est donc de choisir C tel que

$$y_0 = Cw(x_0) + y_p(x_0).$$

Puisque $w(x_0) \neq 0$ il y a un et un seul choix possible pour C. □

Exemple 20.6. *Résolvons dans* $]0, +\infty[$

$$x^2 y' - 2xy = 3x^3 \tag{20.19}$$

Résolution. Ramenons-nous à la forme d'une équation linéaire :

$$y' - \frac{2y}{x} = 3x \ .$$

On considère l'équation linéaire associée

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \tag{20.20}$$

1) Recherchons la solution générale y_h de (20.20) :

$$y_h = Ce^{\int_p \frac{2}{x} dx} = Ce^{2 \ln |x|} = Ce^{\ln x^2} = Cx^2$$

et $w(x) = x^2$.
2) Recherchons une solution particulière de (20.19).
Posons $y = uw$. Remplaçons dans (20.19), nous avons

$$u'w + u \underbrace{(w' - \frac{2w}{x})}_{=0} = 3x$$

puisque w est solution de (20.20). D'où

$$u' = \frac{3}{x} \ .$$

Prenons $u = 3 \ln x$ et ainsi

$$y_p = 3x^2 \ln x \ .$$

3) La solution générale y_g de (20.19) est donnée par

$$y_g = Cx^2 + 3x^2 \ln x$$

C étant une constante arbitraire réelle.

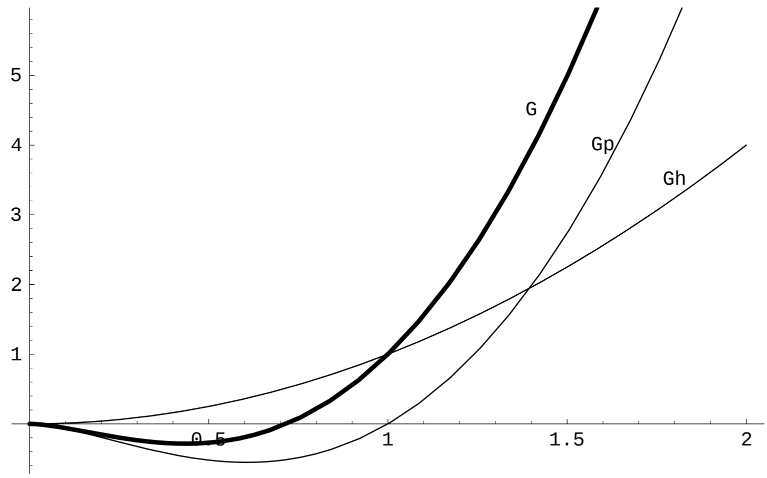


FIGURE 20.5: Illustration du théorème 53 dans le cas de (20.19)

Illustration graphique :
Soit y_1 la solution particulière de (20.19) vérifiant la condition initiale $y_1(1) = 1$, pour obtenir cette solution particulière il faut prendre $C = 1$. Sur la figure 20.5, on a tracé la trajectoire solution G correspondant à y_1, remarquons que cette courbe est obtenue en superposant la parabole G_h d'équation $y = x^2$ (c'est-à-dire le graphe de la solution de l'équation homogène correspondant à $C = 1$) et la trajectoire-solution G_p correspondant à la solution particulière y_p.

Si maintenant on fait varier la constante C, la parabole G_h va bouger et par conséquent la trajectoire-solution G va également se déplacer.

Exemple 20.7. *Cherchons dans* $]-1,1[$ *la solution générale de*

$$y' + \frac{x}{1-x^2} y = \sqrt{1-x} \; . \tag{20.21}$$

Résolution. On considère l'équation homogène

$$y' + \frac{x}{1-x^2} y = 0 \; . \tag{20.22}$$

1) Recherchons la solution générale de (20.22) :

$$y_h = Ce^{-\int_p \frac{x}{1-x^2} dx} = Ce^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = C\sqrt{1-x^2} \; ,$$

d'où $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.
2) Recherchons une solution particulière de (20.21).
Posons $y_p = uw$. Remplaçons dans (20.21), nous obtenons :

$$u'w + u \underbrace{(w' + \frac{x}{1-x^2} w)}_{=0} = \sqrt{1-x} \; ,$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \ .$$

Prenons $u = 2\sqrt{1+x}$ et nous obtenons ainsi $y_p = 2(1+x)\sqrt{1-x}$.
3) La solution générale y_g de (20.21) dans $]-1, 1[$ s'écrit donc :

$$y_g = C\sqrt{1-x^2} + 2(1+x)\sqrt{1-x} \tag{20.23}$$

où C est une constante arbitraire.

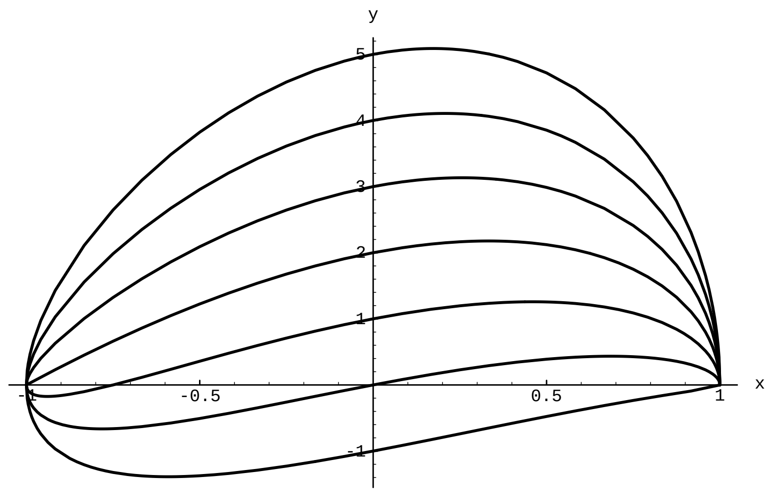


FIGURE 20.6: graphes de solutions particulières de (20.21) pour $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Illustrons cet exemple sur la figure 20.6 : on y fait varier la constante arbitraire C en prenant $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, les graphes des solutions particulières ainsi obtenues s'échelonnent alors du bas vers le haut.

Complétons cet exemple en cherchant la solution particulière de (20.21) dont le graphe passe par le point $(0, 1)$. En utilisant (20.23) on obtient $1 = C + 2$ d'où $C = -1$, la solution particulière cherchée s'écrit donc

$$y_1 = -\sqrt{1-x^2} + 2(1+x)\sqrt{1-x} \ .$$

20.10 Application à un circuit électrique RL

Considérons un circuit électrique RL, il est composé d'une résistance de R ohms, d'une inductance de L henrys, et d'une source électrique $E(t) = E_0 \cos \omega t$ (volts). Etudions l'intensité $I(t)$ circulant dans le circuit. On sait que $I(t)$ répond à l'équation

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \cos \omega t \ .$$

c'est-à-dire

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \cos \omega t \ . \tag{20.24}$$

Résolvons cette équation différentielle linéaire du premier ordre. La solution générale I_h de l'équation homogène associée est

$$I_h = C e^{-\frac{R}{L} t} \ .$$

Soit $w(t) := e^{-\frac{R}{L} t}$. Cherchons I_p une solution particulière de (20.24). Cherchons d'abord une solution particulière I_1 de

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} e^{i\omega t} \ . \tag{20.25}$$

Posons $I_1 = wv$ et cherchons v en remplaçant dans (20.25) on obtient

$$v' = \frac{E_0}{L} e^{(\frac{R}{L} + i\omega)t}$$

et on peut donc prendre

$$v = \frac{E_0}{R + i\omega L} e^{(\frac{R}{L} + i\omega)t} \ .$$

Par conséquent

$$I_1 = \frac{E_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t} \tag{20.26}$$

On sait que

$$I_p = \mathrm{Re}\, I_1 \ ,$$

pour chercher cette partie réelle on pourrait procéder de façon habituelle et on obtiendrait ainsi

$$I_p = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) \ .$$

Afin de mieux faire apparaître la signification physique, procédons autrement en utilisant l'*impédance* (complexe) Z définie par

$$Z := R + i\omega L \ .$$

Remarquons

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

et notons δ l'argument de Z, autrement dit

$$Z = |Z| e^{i\delta} \ .$$

Il s'ensuit

$$I_1 = \frac{E_0}{|Z|} e^{-i\delta} e^{i\omega t} = \frac{E_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \delta)}$$

et donc

$$I_p = \frac{E_0}{|Z|} \cos(\omega t - \delta) \ .$$

Ainsi la solution générale $I(t)$ de (20.24) s'écrit

$$I = I_h + I_p = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{|Z|}\cos(\omega t - \delta) \; .$$

Le courant circulant dans le circuit se présente donc comme la superposition de deux courants d'intensité respective $I_h(t)$, $I_p(t)$. Remarquons que

$$\lim_{t\to+\infty} I_h(t) = 0 \; ,$$

alors que $I_p(t)$ est périodique. Par conséquent à partir d'un certain temps t_1 le courant d'intensité $I_h(t)$ sera négligeable par rapport au courant d'intensité $I_p(t)$, aussi le courant d'intensité $I_h(t)$ est appelé un *courant transitoire*. Remarquons que le temps à partir duquel le courant transitoire est négligeable dépend du rapport $\frac{R}{L}$, plus ce rapport est grand , plus vite le courant transitoire sera négligeable.

Observons le courant d'intensité $I_p(t)$, nous voyons :
— son amplitude est $\frac{E_0}{|Z|}$,
— sa fréquence est la même que la source électrique $E(t)$,
— par rapport à $E(t)$, $I_p(t)$ est soumis à un déphasage $-\delta$.

On peut bien entendu exprimer la constante C au moyen de la condition initiale, on obtient alors

$$C = I(0) - \frac{E_0}{|Z|}\cos(\delta)$$

20.11 Equations différentielles de Bernoulli

Il s'agit des équations différentielles de la forme

$$\boxed{y' + a(x)y = f(x)y^\alpha} \qquad (B)$$

où
— $a(x), f(x)$ sont des fonctions continues dans un intervalle I ,
— $f(x) \not\equiv 0$ dans I ,
— α est un réel $\neq 0$ et $\neq 1$.

On va voir qu'on peut transformer ces équations non linéaires en des équations linéaires.

Pour ce faire l'idée est de diviser l'équation initiale par y^α . Au préalable on envisage ce qui se passe si $y \equiv 0$ car a priori cela pourrait donner une solution. Ensuite, on envisage le cas $y \not\equiv 0$, alors on obtient

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = f(x) \; ,$$

on pose

$$u = y^{1-\alpha} \quad . \qquad\qquad (*)$$

et (B) devient

$$u' + (1-\alpha)a(x)u = (1-\alpha)f(x) \qquad\qquad (L_B)$$

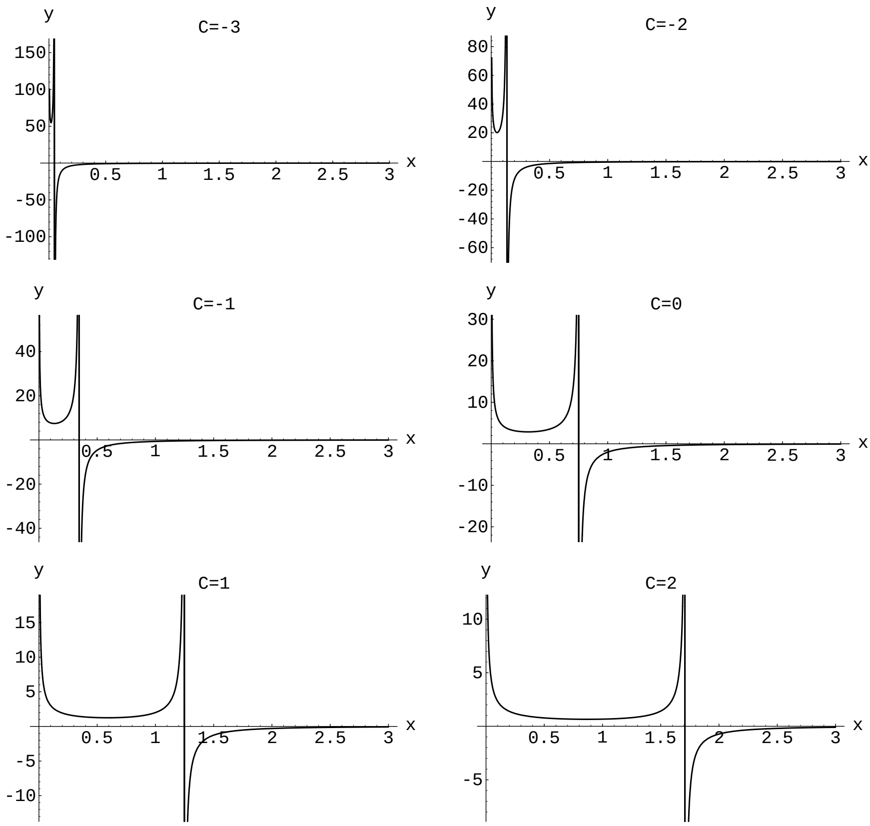


FIGURE 20.7: Graphes de solutions de l'équation (20.27) correspondant à $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2$

qui est une équation linéaire. On doit alors résoudre (L_B) et chercher ensuite y au moyen de $(*)$.

Exemple 20.8. *Cherchons la solution générale dans* $]0, +\infty[$ *de*

$$y' + \frac{1}{x}y = y^2(x^2+1) . \tag{20.27}$$

Résolution. Travaillons dans $]0, +\infty[$.
1) $y \equiv 0$ est une solution particulière de (20.27).
2) Soit $y \not\equiv 0$. L'équation (20.27) devient

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x^2 + 1$$

Posons $u = \dfrac{1}{y}$. On obtient

$$u' - \frac{1}{x}u = -(x^2+1) . \tag{20.28}$$

3) Cherchons la solution générale u_h de

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 . \tag{20.29}$$

On obtient

$$u_h = Ce^{\int_P \frac{1}{x}dx} = C \mid x \mid = Cx$$

et on pose $w(x) = x$.
4) Recherchons une solution particulière u_p de (20.28). Posons $u_p = w.v$. En remplaçant dans (20.28) nous avons

$$v'w + v \underbrace{(w' - \frac{1}{x}w)}_{=0} = -(x^2 + 1)$$

d'où

$$v' = -\frac{(x^2+1)}{x} = -x - \frac{1}{x} .$$

Nous pouvons prendre

$$v = -\frac{x^2}{2} - \ln x ,$$

Ainsi

$$u_p = -\frac{x^3}{2} - x \ln x.$$

5) La solution générale u_g de (20.28) est donnée par

$$u_g = Cx - \frac{x^3}{2} - x \ln x$$

La solution générale y_g de (20.27) s'écrit donc

$$y_g = \frac{1}{Cx - \frac{x^3}{2} - x \ln x}$$

où C est une constante arbitraire. De plus $y \equiv 0$ est une solution singulière de (20.27).

Illustration graphique : sur la figure 20.7, on a représenté les graphes des solutions particulières de (20.27) correspondant à $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

20.12 Exercices

1. Chercher la solution générale des équations différentielles suivantes , chercher une solution particulière vérifiant les conditions indiquées.

	Equation	Cond. initiale
1)	$y' = -y^2$	
2)	$y' = (x^3-1)e^{-y}$	
3)	$y' = x\,y^3$	
4)	$y' = x\,y$	$y(0) = 1$
5)	$y'\sin x = y$ dans $]0,\pi[$	$y(\frac{\pi}{2}) = 2$
6)	$y' + e^x y = 0$	
7)	$y - \ln y' = 0$	$y'(0) = 1$
8)	$y' - xy = x^3$	$y(0) = 0$
9)	$y' - \frac{y}{x} = x^2$ dans $]0,+\infty[$	
10)	$xy' - 2y + x = 0$ dans $]0,+\infty[$	
11)	$(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ dans $]1,+\infty[$	
12)	$\sqrt{1+x^2}\,y' = y$	
13)	$y' + \frac{y}{1-x^2} = \sqrt{x^2-1}$ dans $]1,+\infty[$	
14)	$y' + 2y = 4y^3$	
15)	$y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 8$	
16)	$y' - 2y = (x-1)e^{2x} + x$	
17)	$xy' + y = y^2 \ln x$ dans $]0,+\infty[$	
18)	$y' + y - x^2y^2 = 0$	
19)	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$	
20)	$y' + 2y = 2x^2 - 3x + 5$	
21)	$y' + 3y = e^{2x}$	
22)	$y' + y = xe^{-x}$	$y(1) = 1$
23)	$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ dans $]0,+\infty[$	
24)	$y' - \frac{5}{2x^2+x-3}\,y = e^x(1-x^2)$ dans $]1,+\infty[$	$y(2) = 0$

2. On considère : $y' - y = e^x$ (1).
   a) Représenter les graphes correspondant aux solutions de (1),
   b) chercher une solution particulière y_1 de (1) admettant un extrémum local pour $x = 3$,
   c) chercher la solution dont le graphe passe par le point $(1,1)$.
3. La concentration $c(t)$ d'une solution évolue comme suit

$$c' = 3(c-1)(c-2) \quad c(0) = 0\ .$$

   Etudier l'évolution de la concentration $c(t)$ pour $t \geq 0$. Etudier la solution obtenue et tracer son graphe.
4. Etudier l'évolution de la population $p(t)$ soumise au modèle suivant

$$p' = 2p(1-p)\ ,\ p(0) = \frac{1}{2} \qquad .$$

Chapitre 21

Equations différentielles linéaires du second ordre

Dans ce chapitre on va étudier les équations différentielles linéaires du second ordre ; comme on l'a déjà dit, il s'agit des équations différentielles de la forme

$$\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)} \tag{21.1}$$

où

$a(x)$, $b(x)$ et $f(x)$ sont continues dans un intervalle I ,

$a(x)$ et $b(x)$ sont à valeurs réelles et $f(x)$ à valeurs complexes (pouvant bien entendu être réelles).

Au chapitre précédent on a obtenu des résultats généraux à propos des équations différentielles linéaires, nous allons bien entendu les appliquer. Par conséquent, pour obtenir la solution générale de (21.1), il faut :

1. *Chercher la solution générale de l'équation homogène*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \ .$$

   On se limitera ici à un cas particulier très important : les équations différentielles linéaires à coefficients constants, alors les coefficients $a(x)$ et $b(x)$ sont des constantes réelles.

2. *Chercher une solution particulière de (21.1).*
   Là nous verrons deux méthodes :
   — une méthode générale, la **Méthode par variation de constantes**, toujours applicable ... pour autant qu'on puisse calculer les primitives rencontrées ;
   — la **Méthode des coefficients indéterminés**, méthode très simple qui nécessite que les coefficients $a(x)$, $b(x)$ soient constants mais aussi que le second membre $f(x)$ soit de forme d'une exponentielle-polynôme ou d'un polynôme (ou du moins puisse s'y ramener).

21.1 Equations linéaires homogènes du 2e ordre à coefficients constants

Il s'agit donc des équations de la forme

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} \quad (H)$$

où a et b sont des constantes réelles. Ici il n'y a pas de condition sur x et on travaille donc dans $\mathbb{R}$ tout entier.

Notons $L(D)$ l'opérateur de dérivation

$$D^2 + aD + b\ ,$$

l'équation (H) s'écrit

$$L(D)y = 0\ .$$

Cherchons la solution générale y_h de (H).

On appelle **polynôme caractéristique** associé à $L(D)$ le trinôme du second degré

$$L(z) = z^2 + az + b\ .$$

Les racines de $L(z)$ vont être déterminantes dans la résolution de l'équation homogène. Trois cas peuvent se présenter, dans chacun de ces cas on définit deux fonctions $\boldsymbol{w_1}$ et $\boldsymbol{w_2}$ comme suit :

— $a^2 - 4b > 0$: $L(z)$ **a deux racines réelles distinctes** notées α et β ; on pose

$$\boxed{w_1(x) := e^{\alpha x} \quad \text{et} \quad w_2(x) := e^{\beta x}}\ .$$

— $a^2 - 4b = 0$: $L(z)$ **a une racine double réelle** notée α ; on pose

$$\boxed{w_1(x) := e^{\alpha x} \quad \text{et} \quad w_2(x) := x \cdot e^{\alpha x}}\ .$$

— $a^2 - 4b < 0$: $L(z)$ **a deux racines non réelles distinctes et conjuguées** notées $\gamma + i\theta$ et $\gamma - i\theta$ (γ et θ étant réels) ; on pose

$$\boxed{w_1(x) := e^{\gamma x} \cos \theta x \quad \text{et} \quad w_2(x) := e^{\gamma x} \sin \theta x}\ .$$

Dans chacun de ces trois cas, *les fonctions w_1, w_2 ne sont pas multiples l'une de l'autre et sont donc linéairement indépendantes* (rappelons : deux fonctions y_1, y_2 sont linéairement indépendantes lorsqu'on ne peut trouver des constantes λ_1, λ_2 non toutes deux nulles telles que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \equiv 0$).

Pour établir le résultat donnant la solution générale de (H), on a besoin d'étendre un résultat vu précédemment. On sait que si a_0 est une constante réelle la solution générale de $y' - a_0 y = 0$ est $y = Ce^{a_0 x}$. Montrons qu'il en est de même si la constante réelle est a_0 est remplacé par un complexe z_0. Soit $z_0 = a_0 + ib_0$ un nombre complexe (a_0, b_0 réels). Cherchons la solution générale de

$$y' - z_0 y = 0\ . \tag{21.2}$$

Posons $u = e^{-ib_0x}y$ et remplaçons dans (21.2), puisque $y' = ib_0e^{ib_0x}u + e^{ib_0x}u'$, on obtient

$$ib_0e^{ib_0x}u + e^{ib_0x}u' - (a_0 + ib_0)e^{ib_0x}u = 0$$

c'est-à-dire

$$e^{ib_0x}(u' - a_0u) = 0$$

d'où

$$u' - a_0u = 0 \; .$$

La solution générale de cette équation est $u = Ce^{a_0x}$. Par conséquent la solution générale de (21.2) s'écrit

$$y = Ce^{a_0x}e^{ib_0x} = Ce^{(a_0+ib_0)x} \; ,$$

c'est-à-dire

$$y = Ce^{z_0x} \; .$$

Théorème 56 (Solution générale de l'équation homogène)**.**
La solution générale y_h de $L(D)y = 0$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit

$$\boxed{y_h = C_1w_1 \; + \; C_2w_2} \; ,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires (réelles ou complexes suivant qu'on cherche la solution générale y_h à valeurs réelles ou complexes).

Démonstration. Notons α et β les racines du polynôme caractéristique et lorsque le polynôme caractéristique a une racine de multiplicié 2, posons $\alpha = \beta$. Nous avons

$$(D-\alpha)(D-\beta)y = (D-\alpha)(y' - \beta y) = y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\,\beta\, y = y'' + ay' + by$$

puisque $\alpha + \beta = -a$ et $\alpha\,\beta = b$. Par conséquent

$$L(D)y = (D-\alpha)(D-\beta)y \; .$$

Appliquons cela pour résoudre (H).

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 \quad & \text{ssi} \quad (D-\alpha)u = 0 \quad \text{et} \quad (D-\beta)y = u \\ & \text{ssi} \quad (D-\beta)y = C_1e^{\alpha x} \end{aligned} \tag{21.3}$$

où C_1 est une constante arbitraire.

Résolvons maintenant (21.3) en appliquant la méthode habituelle de résolution d'une équation linéaire du premier ordre. Une deuxième constante arbitraire apparaît dans la solution de l'équation homogène $(D-\beta)y = 0$ et, en posant $w = e^{\beta x}$ et $y = wu$, nous obtenons

$$w \cdot u' = C_1e^{\alpha x}$$

d'où

$$u' = C_1e^{(\alpha-\beta)x} \; .$$

Deux cas se présentent :

1. Si $\alpha = \beta$, on prend $u = C_1 x$ d'où
$$y_h = C_2 e^{\alpha x} + C_1 x e^{\alpha x} \ , \tag{21.4}$$
c-à-d le formule annoncée.
2. Si $\alpha \neq \beta$, on prend
$$u = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x}$$
d'où
$$y_h = C_2 e^{\beta x} + \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x}$$
et donc
$$y_h = C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{\alpha x} \ , \tag{21.5}$$
où C_3 est la constante arbitraire $= \frac{C_1}{\alpha - \beta}$.

Si on cherche la solution y_h à valeurs complexes, on prend des constantes arbitraires complexes. Si on cherche la solution y_h à valeurs réelles, on voudrait que les constantes soient réelles, c'est bien le cas lorsque les racines α, β sont réelles car alors $e^{\alpha x}$ et $e^{\beta x}$ sont à valeurs réelles. Mais il n'en est pas ainsi si les α et β ne sont pas réelles ! Envisageons maintenant ce cas et essayons de mettre y_h sous une autre forme de telle sorte les solutions y_h réelles correspondent à des constantes arbitraires réelles. Forcément α, β sont des complexes conjugués et nous avons noté $\alpha = \gamma + i\theta$ et $\beta = \gamma - i\theta$. En développant (21.5), on a
$$y_h = (C_1 + C_2) e^{\gamma x} \cos \theta x + i(C_1 - C_2) e^{\gamma x} \sin \theta x$$
d'où
$$y_h = C_1' e^{\gamma x} \cos \theta x + C_2' e^{\gamma x} \sin \theta x \, . \tag{21.6}$$
Le système
$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = & C_1' \\ iC_1 - iC_2 & = & C_2' \end{cases}$$
relie les constantes C_1, C_2 aux constantes C_1', C_2' ; dès lors si C_1, C_2 sont des complexes quelconques, C_1' et C_2' sont aussi des complexes quelconques. De plus si C_1' et C_2' sont réels, la solution y_h est réelle ; réciproquement si
$$C_1' e^{\gamma x} \cos \theta x + C_2' e^{\gamma x} \sin \theta x$$
est réel, alors
$$(\operatorname{Im} C_1') e^{\gamma x} \cos \theta x + (\operatorname{Im} C_2') e^{\gamma x} \sin \theta x \equiv 0$$
d'où $\operatorname{Im} C_1' = \operatorname{Im} C_2' = 0$, autrement dit C_1', C_2' sont réels. *Si α et β sont non réels, on utilise donc la forme (21.6) plutôt que la forme (21.5).* □

Remarquons que la solution générale y_h dépend de **deux** constantes arbitraires, en fait il en est ainsi pour toutes les équations différentielles du second ordre.

Puisque les fonctions w_1 et w_2 sont linéairement indépendantes, du théorème ci-dessus il découle :

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ suivant qu'on considère les solutions à valeurs réelles ou à valeurs complexes. Les deux fonctions w_1, w_2 forment une base de cet espace vectoriel.

Dans le tableau suivant on a envisagé trois exemples :

Equation	Racines du pol. car.	Solution générale
$y'' + y' - 2y$	-2 et 1	$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$
$y'' - 2y' + y$	1 rac. double	$y_h = C_1 x e^x + C_2 e^x$
$y'' - 2y' + 5y$	$1 - 2i$ et $1 + 2i$	$y_h = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$

On voit également que *les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont solutions d'équations différentielles très simples.* Considérons l'équation

$$y'' + y = 0 \; . \tag{21.7}$$

Le polynôme caractéristique est $z^2 + 1$ et ses racines sont donc $\pm i$, par conséquent la solution générale de (21.7) s'écrit

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \; ,$$

ainsi $\cos x$, $\sin x$ sont des solutions particulières de (21.7) et même constituent une base de l'espace vectoriel formé par toutes les solutions de (21.7).

De même considérons l'équation

$$y'' - y = 0 \; . \tag{21.8}$$

Le polynôme caractéristique est $z^2 - 1$ et ses racines sont donc ± 1, par conséquent la solution générale de (21.7) s'écrit

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \; ,$$

en prenant $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ on obtient $\operatorname{ch} x$ et en prenant $C_1 = -C_2 = \frac{1}{2}$ on obtient $\operatorname{sh} x$. Les fonctions $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ sont évidemmment linéairement indépendantes et l'espace vectoriel des solutions de (21.8) est un espace vectoriel de dimension 2, par conséquent $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ forment aussi une base de cet espace vectoriel et on peut dire que la solution générale de (21.8) s'écrit aussi

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x \; .$$

Ce qu'on vient de remarquer pour l'équation différentielle (21.8) s'étend à l'équation homogène générale (H), on obtient ainsi :

Théorème 57. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène (H) linéairement indépendantes, alors la solution générale de (H) est $C_1 y_1 + C_2 y_2$ où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.*

On peut caractériser le fait que deux solutions de l'équation homogène soient linéairement indépendantes au moyen de l'expression suivante appelée *wronskien* :

Définition. *Le **wronskien** associé à y_1 et y_2 est le déterminant*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} .$$

Proposition 58. *Le Wronskien associé à w_1 et w_2 est toujours non nul.*

En effet, envisageons le cas où le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes, alors le wronskien de w_1 et w_2 est $(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)x}$ qui est $\neq 0$. On procède de la même façon dans les deux autres cas.

Généralisons le résultat ci-dessus :

Proposition 59. *Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène (H). Alors les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si le wronskien de y_1, y_2 est $\neq 0$ pour tout x .*

Démonstration. Soient $y_1 = C_1w_1 + C_2w_2$ et $y_2 = D_1w_1 + D_2w_2$ des solutions de l'équation homogène (H) . Alors

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= C_1D_1 \begin{vmatrix} w_1 & w_1 \\ w_1' & w_1' \end{vmatrix} + C_1D_2 \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} + C_2D_1 \begin{vmatrix} w_2 & w_1 \\ w_2' & w_1' \end{vmatrix} + C_2D_2 \begin{vmatrix} w_2 & w_2 \\ w_2' & w_2' \end{vmatrix} \\ &= (C_1D_2 - C_2D_1) \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Puisque le wronskien de w_1 et w_2 est toujours non nul, le wronskien de y_1 et y_2 s'annule ssi $C_1D_2-C_2D_1 = 0$, autrement dit ssi C_1, C_2 sont proportionnels à D_1, D_2 c'est-à-dire ssi y_1 et y_2 sont linéairements dépendantes. □

Envisageons le cas où le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle et mettons alors la solution générale de (H) sous une autre forme intéressante.

Théorème 60. *Si le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées distinctes $\gamma+i\theta$ et $\gamma-i\theta$, alors la solution générale y_h de (H) à valeurs réelles s'écrit*

$$\boxed{y_h = Ae^{\gamma x}\sin(\theta x+\varphi)}$$

où A est une constante arbitraire ≥ 0 (appelée l'amplitude) et φ est une constante arbitraire (appelée la phase) prise dans $]-\pi,\pi]$.

Démonstration. On sait que

$$y_h = C_1e^{\gamma x}\cos\theta x \,+\, C_2e^{\gamma x}\sin\theta x \,.$$

Posons

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,,$$

et prenons pour φ l'argument du point (C_2, C_1) mesuré par exemple dans $]-\pi,\pi]$. (C_2, C_1) est un point quelconque du plan, par conséquent A représente une constante quelconque ≥ 0 et φ une constante quelconque de $]-\pi,\pi]$. Nous avons

$$C_1 = A\sin\varphi \quad \text{et} \quad C_2 = A\cos\varphi$$

d'où

$$y_h = Ae^{\gamma x}(\cos\theta x\sin\varphi \,+\, \sin\theta x\cos\varphi) = Ae^{\gamma x}\sin(\theta x+\varphi)\,.$$

□

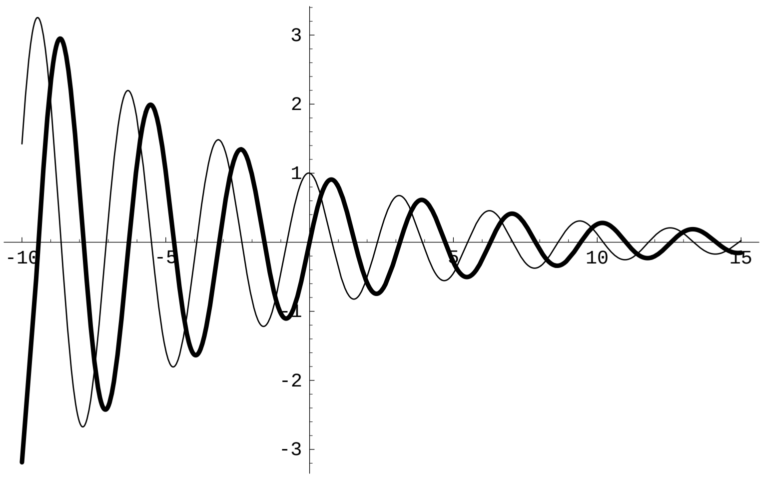


FIGURE 21.1: Graphe de $e^{-x/8}\sin 2x$ et de $e^{-x/8}\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

Plaçons-nous encore dans les conditions du résultat précédent. En posant $t = x + \frac{\varphi}{\theta}$, la forme de y_h trouvée ci-dessus devient

$$y_h = Ae^{-\frac{\gamma\varphi}{\theta}} e^{\gamma t}\sin\theta t = Ke^{\gamma t}\sin\theta t$$

où K est un réel quelconque ≥ 0. Par conséquent les graphes des solutions y_h s'obtiennent au départ du seul graphe de

$$e^{\gamma x}\sin\theta x$$

en appliquant une translation parallèlement à $\boldsymbol{o}x$ et une affinité dans la direction de $\boldsymbol{o}y$. Sur la figure 21.1 on a tracé les graphe de $e^{-x/8}\sin 2x$ et de $e^{-x/8}\sin(2x+\frac{\pi}{2})$.

21.2 Méthode par “variation de constantes”

Considérons l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (L)$$

où $f(x)$ est continue dans I. Supposons que y_1 et y_2 soient deux solutions de l'équation homogène (H) linéairement indépendantes.

Désignons par u_1 et u_2 deux fonctions vérifiant le système

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} u_1\cdot y_1 & + & u_2\cdot y_2 & = & 0 \\ u_1\cdot y_1' & + & u_2\cdot y_2' & = & f(x)\end{array}\right.} \tag{21.9}$$

Notons W le wronskien de y_1, y_2 ; vu la propriété 59, on a $W(x) \neq 0$ pour tout x dans I . Pour tout $x \in I$, ce système a donc une et seule solution $u_1(x), u_2(x)$ donnée par

$$u_1 = \frac{-f \cdot y_2}{W} \quad et \quad u_2 = \frac{f \cdot y_1}{W} \ .$$

Par conséquent les fonctions u_1 , u_2 sont non seulement définies dans I mais aussi continues dans I.

Théorème 61. *Soient u_1 et u_2 les solutions du système (21.9). Alors la fonction*

$$\boxed{(\int_p u_1(x)dx) \cdot y_1 \ + \ (\int_p u_2(x)dx) \cdot y_2}$$

est une solution particulière de (L) dans I.

Démonstration. Posons

$$y_p = (\int_p u_1(x)dx) \cdot y_1 \ + \ (\int_p u_2(x)dx) \cdot y_2 \ .$$

En utilisant (21.9), on obtient :

$$\begin{aligned} y_p' &= (\int_p u_1(x)dx) \cdot y_1' \ + \ (\int_p u_2(x)dx) \cdot y_2' \ , \\ y_p'' &= (\int_p u_1(x)dx) \cdot y_1'' \ + \ (\int_p u_2(x)dx) \cdot y_2'' \ + \ f \ . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$L(D)y_p = (\int_p u_1(x)dx)(L(D)y_1) \ + \ (\int_p u_2(x)dx)(L(D)y_2) \ + \ f \ ,$$

d'où, puisque y_1 et y_2 sont ses solutions particulières de l'équation homogène,

$$L(D)y_p = f \ .$$

□

Exemple 21.1. *Résolvons dans* $]-\pi/2, \pi/2[$ *l'équation*

$$y'' + y = \operatorname{tg} x \tag{21.10}$$

Résolution. 1) Recherchons la solution générale y_h de

$$y'' + y = 0 \ . \tag{21.11}$$

Le polynôme caractéristique est $z^2 + 1$, ses racines sont donc i et$-i$, d'où

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

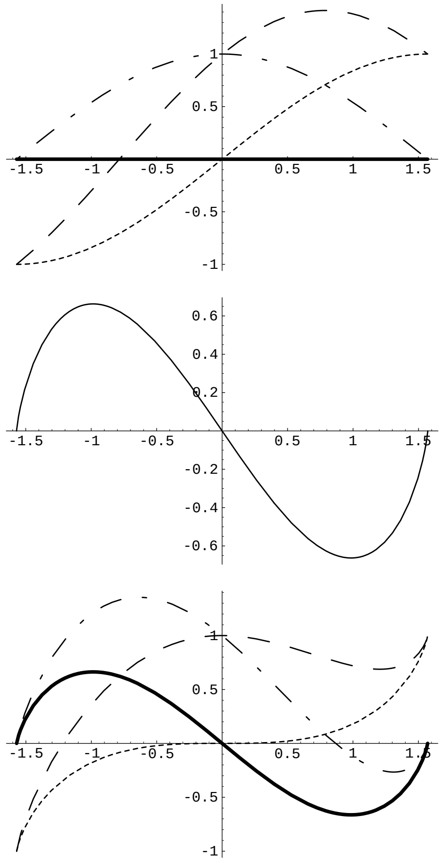


FIGURE 21.2: de haut en bas des trajectoires-solutions relatives à y_h , y_p et y_g de (21.10)

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires. On a :

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{et} \quad y_2(x) = \sin x \, .$$

2) Recherchons une solution particulière de (21.10).
Le système (21.9) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1 \cos x + u_2 \sin x & = 0 \\ -u_1 \sin x + u_2 \cos x & = \operatorname{tg} x \, , \end{array} \right.$$

d'où

$$u_2 = \sin x \quad \text{et} \quad u_1 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \, .$$

Nous avons :

$$\int u_2(x)dx \simeq -\cos x \quad \text{et} \quad \int u_1(x) \simeq \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \, .$$

Par conséquent on prend comme solution particulière de (21.10)

$$\begin{aligned} y_p &= (\sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x})\cos x + (-\cos x)\sin x \\ &= \frac{1}{2}(\cos x)\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\ . \end{aligned}$$

3) La solution générale y_G de (21.10) s'écrit

$$y_g = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}(\cos x)\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\ .$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.
Remarquons

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \ln\mid \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\mid\ .$$

Sur la figure 21.2 on a successivement représenté de haut en bas les 4 trajectoires-solutions relatives à y_h pour $C_1 = 0,1$ et $C_2 = 0,1$, la trajectoire-solution relative à y_P et les 4 trajectoires-solutions de y_g obtenues par superposition.

21.3 Existence et unicité de la solution

La solution de y_h de l'équation homogène est valable dans $\mathbb{R}$ et la solution y_p que nous venons de trouver est valable dans I. Nous pouvons donc chercher la solution générale de (L) dans I tout entier. Puisque y_h dépend de deux constantes arbitraires, la solution générale y_g dépend aussi de deux constantes arbitraires et pour déterminer complètement une solution de (L) il faut donc lui imposer deux conditions supplémentaires. Il faudra donc donner ici deux conditions initiales qui généralement sont de la forme suivante

$$y(x_0) = y_0 \qquad , \qquad y'(x_0) = v_0$$

où x_0, y_0, v_0 sont fixés. Remarquons que cette double condition consiste à imposer à la trajectoire-solution de passer par le point (x_0, y_0) et d'avoir en ce point une tangente dont le coefficient angulaire vaut v_0 .

Théorème 62 (Existence et unicité de la solution)**.**
*Soit I intervalle. Alors pour tout $x_0 \in I$ et pour tous réels y_0 , v_0 il existe **une** et **une seule** solution y de (L) dans I telle que*

$$y(x_0) = y_0 \ \ \textit{et}\ \ y'(x_0) = v_0\ .$$

Par conséquent par tout point $\boldsymbol{p}_0$ du plan dont l'abscisse est dans I et pour toute droite d non verticale passant par $\boldsymbol{p}_0$, il existe une et une seule trajectoire-solution de (L) qui passe par $\boldsymbol{p}_0$ et qui soit tangente à d en $\boldsymbol{p}_0$.

Démonstration. La solution générale y_g de (L) s'écrit

$$y_g = C_1 w_1 + C_2 w_2 + y_p\ .$$

Les deux conditions initiales du théorème sont satisfaites si et seulement si on choisit les constantes C_1 et C_2 vérifiant le système

$$\begin{cases} C_1 w_1(x_0) + C_2 w_2(x_0) + y_p(x_0) & = y_0 \\ C_1 w_1'(x_0) + C_2 w_2'(x_0) + y_p'(x_0) & = v_0 \,. \end{cases}$$

Puisque le wronskien de w_1 et w_2 est toujours non nul, nous savons que le système ci-dessus a une et seule solution (C_1, C_2), d'où la conclusion du théorème. □

21.4 Méthode des coefficients indéterminés

La **méthode des coefficients indéterminés** nécessite que le second membre $f(x)$ ait une forme bien particulière mais aussi très fréquente : le second membre de (L) doit être un polynôme ou une exponentielle-polynôme, autrement dit on suppose

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = e^{z_0 x} \cdot P(x)}}$$

où

z_0 **est un nombre complexe et** $P(x)$ **est un polynôme.**

Si $z_0 = 0$, le second membre $f(x)$ se réduit donc au polynôme $P(x)$. La méthode qui va suivre est particulièrement simple et ne nécessite le calcul d'aucune primitive. Elle se base sur le résultat suivant :

Théorème 63. *L'équation (L) a une solution particulière de la forme*

$$\boxed{e^{z_0 x} \cdot Q(x) \cdot x^t}$$

où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ et où
- — *$t = 0$ si z_0 n'est pas racine du polynôme caractéristique,*
- — *$t = 1$ si z_0 est une racine simple du polynôme caractéristique,*
- — *$t = 2$ si z_0 est une racine double du polynôme caractéristique.*

Démonstration. Appliquons la Méthode par variation de constantes. A titre d'exemple, envisageons le cas où le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes α et β. Soit p le degré de $P(x)$. Alors $w_1(x) = e^{\alpha x}$ et $w_2(x) = e^{\beta x}$. La résolution de

$$\begin{cases} u_1 e^{\alpha x} + u_2 e^{\beta x} & = & 0 \\ u_1 \alpha e^{\alpha x} + u_2 \beta e^{\beta x} & = & e^{z_0 x} P(x) \end{cases}$$

donne

$$u_2 = \frac{1}{\beta - \alpha} e^{(z_0 - \beta)x} P(x) \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} e^{(z_0 - \alpha)x} P(x) \,.$$

Envisageons les deux cas possibles.

1. *z_0 diffère de α et β.*

Les fonctions u_1, u_2 étant des exponentielles-polynômes, il existe une primitive de u_1, resp. de u_2, qui soit de la forme $e^{(z_0-\alpha)x} Q_1(x)$, resp. $e^{(z_0-\beta)x} Q_2(x)$, où $Q_1(x)$,

$Q_2(x)$ sont des polynômes de degré p. En remplaçant dans la formule donnant y_p on obtient

$$y_p = e^{z_0 x}(Q_1(x) + Q_2(x))$$

où $Q_1(x) + Q_2(x)$ est un polynôme de degré $\leq p$. Puisque dans l'équation (L) le membre de droite contient un polynôme de degré p, il faut trouver dans le membre de gauche des monômes de degré p, par conséquent le degré de $Q_1(x) + Q_2(x)$ doit être p.

2. *z_0 est une racine du polynôme caractéristique, par exemple $z_0 = \alpha$.*
u_2 étant une exponentielle-polynôme a une primitive de la forme $e^{(z_0-\beta)x}Q_1(x)$ où $Q_1(x)$ est un polynôme de degré p, soit a le terme indépendant de ce polynôme. La fonction u_1 est un polynôme de degré p, on peut donc choisir comme primitive de u_1 un polynôme $Q_2(x)$ de degré $p+1$ dont le terme indépendant vaut $-a$. En remplaçant dans la formule donnant y_p on obtient

$$y_p = e^{z_0 x}(Q_1(x) + Q_2(x))$$

où $Q_1(x) + Q_2(x)$ est un polynôme de degré $p+1$ de terme indépendant nul.
$Q_1(x)+Q_2(x)$ se met donc sous la forme $x\,Q_3(x)$ où $Q_3(x)$ est un polynôme de degré p, d'où

$$y_p = e^{z_0 x} x\,Q_3(x)\ .$$

□

La Méthode des coefficients indéterminés consiste donc

> *à poser une solution particulière y_p en appliquant le théorème ci-dessus, les coefficients de ce polynôme étant indéterminés. On détermine ensuite ces coefficients en remplaçant dans l'équation (L).*

Exemple 21.2. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$

$$y'' + y' = (x+1)e^{2x}\ . \tag{21.12}$$

Résolution. 1) Recherchons la solution générale y_h de

$$y'' + y' = 0\ . \tag{21.13}$$

Puisque $L(z) = z^2 + z$, les racines du polynôme caractéristique sont 0 et-1. Par conséquent

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.
2) Recherchons une solution particulière y_p de (21.12).
On pose

$$y_p = e^{2x}(Ax + B)\ .$$

En remplaçant dans (21.12) on obtient

$$e^{2x}(6Ax + 6B + 5A) = e^{2x}(x + 1) \; .$$

Il s'ensuit $A = \frac{1}{6}$ et $B = \frac{1}{36}$, d'où

$$y_p = \frac{1}{36} e^{2x}(6x + 1) \; .$$

3) La solution générale y_g de (21.12) s'écrit donc

$$y_g = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{36} e^{2x}(6x + 1)$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

Représentation graphique : sur la figure 21.3 on a représenté les trajectoires-solutions de (21.12) correspondant à $C_1 = 0$ et $C_2 = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

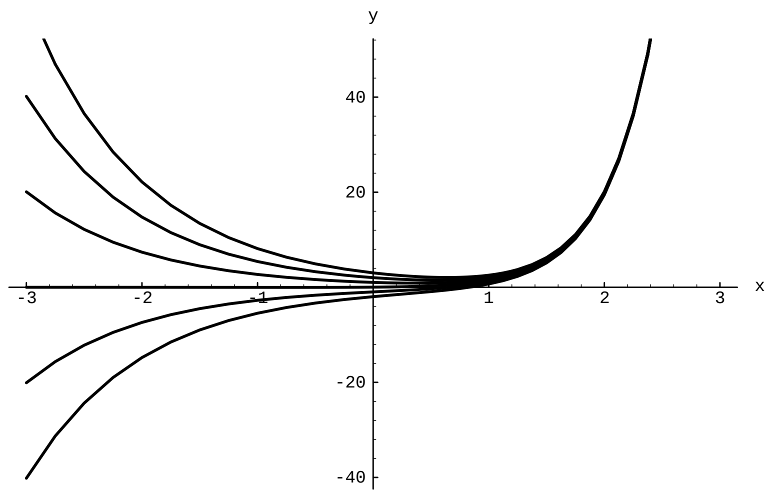


FIGURE 21.3: trajectoires-solutions de (21.12) pour $C_1 = 0$ et $C_2 = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Exemple 21.3. *Cherchons la solution de*

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x + 1) \tag{21.14}$$

vérifiant la condition initiale

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \tag{21.15}$$

Résolution. Recherchons d'abord la solution générale de (21.14).
1) Recherchons la solution générale y_h de

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \,. \tag{21.16}$$

$L(z) = z^2 - 4z + 4$, d'où le polynôme caractéristique a une seule racine à savoir 2. Par conséquent

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{2x} \,.$$

2) Recherchons une solution particulière y_p de (21.14). On pose

$$y_p = e^{2x} x^2 (Ax + B) \,.$$

En remplaçant dans (21.14), on obtient $A = \frac{1}{6}$ et $B = \frac{1}{2}$ d'où

$$y_p = e^{2x}(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2) \,.$$

3) La solution y_g de (21.14) s'écrit donc

$$y_g = (C_1 x + C_2)e^{2x} + e^{2x}(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires.

Choisissons maintenant C_1 et C_2 pour vérifier la condition initiale. On doit avoir : $C_2 = 1$ et, puisque $y_g' = e^{2x}(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (2C_1 + 1)x + C_1 + 2C_2)$,

$$C_1 + 2C_2 = 0 \,,$$

il s'ensuit $C_1 = -2$ et $C_2 = 1$. La solution y cherchée est donc

$$y = e^{2x}(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1) \,.$$

D'après le Principe de superposition, on sait que si y est solution de $L(D)y = f(x)$ alors $\operatorname{Re} y$ (resp. $\operatorname{Im} y$) est solution de $L(D)y = \operatorname{Re} f(x)$ (resp. $L(D)y = \operatorname{Im} f(x)$), dès lors

on peut étendre le champ d'application de la Méthode des coefficients indéterminés au cas où le second membre $f(x)$ est de la forme

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = e^{ax} P(x) \cos{(bx)} \quad ou \quad f(x) = e^{ax} P(x) \sin{(bx)}}}$$

où a et b étant des réels et $P(x)$ un polynôme à coefficients réels.

En effet, on a alors

$$e^{ax} P(x) \cos(bx) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x} P(x)) \quad \text{et} \quad e^{ax} P(x) \sin(bx) = \operatorname{Im}(e^{(a+ib)x} P(x)) \,.$$

On peut donc
- *d'abord chercher une solution particulière avec le second membre* $e^{(a+ib)x}P(x)$ *,*
- *en déduire ensuite une solution particulière avec le second membre* $e^{ax}P(x)\cos(bx)$ *ou* $e^{ax}P(x)\sin(bx)$ *.*

Exemple 21.4. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$

$$y'' + 4y = \sin x \; . \tag{21.17}$$

Résolution. 1) Recherchons la solution générale y_h de

$$y'' + 4y = 0 \; . \tag{21.18}$$

Les racines du polynôme caractéristique sont $2i$ et $-2i$; d'où

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \; .$$

2) Recherchons une solution particulière y_1 de

$$y'' + 4y = e^{ix} \; . \tag{21.19}$$

On pose

$$y_1 = Ae^{ix} \; .$$

En remplaçant dans (21.19), on obtient $3Ae^{ix} = e^{ix}$ d'où $A = \frac{1}{3}$; il s'ensuit

$$y_1 = \frac{1}{3}e^{ix} \; .$$

3) Recherchons une solution particulière y_p de (21.17)
Vu le Principe de superposition nous pouvons prendre

$$y_p = \mathcal{I}y_1 = \frac{1}{3}\sin x \; .$$

4) La solution générale y_g de (21.17) s'écrit donc

$$y_g = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\sin x \; ,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

Représentation graphique : Sur la figure 21.4 on a représenté les trajectoires-solutions de (21.17) passant par l'origine (ce qui demande $C_1 = 0$) et en faisant varier la pente de la tangente à l'origine (on a pris $C_2 = 0, 1, 2, 3$ ce qui correspond à $y'(0) = \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{19}{3}$).

D'après le Principe de superposition, si y_1, y_2 sont solutions de $L(D)y = f_1(x)$, respectivement $L(D)y = f_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est solution $L(Dy = f_1(x) + f_2(x)$. Par conséquent

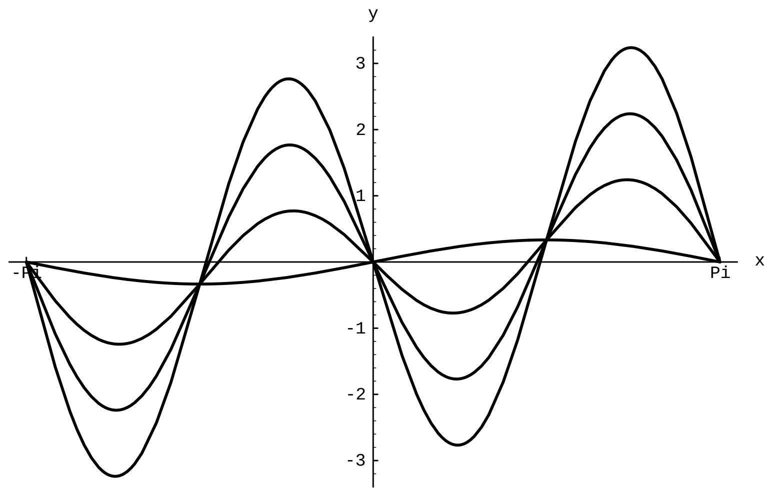


FIGURE 21.4: trajectoires des solutions de (21.17) pour $C_1 = 0$ et $C_2 = 0, 1, 2, 3$

on peut également traiter par la Méthode des coefficients indéterminés le cas où le second membre $f(x)$ est une somme d'exponentielles-polynômes ou de polynômes, chacun pouvant en plus être multiplié par un $\cos bx$ *ou ou* $\sin bx$.

On raisonnera de la sorte dans les deux exemples suivants.

Exemple 21.5. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$

$$y'' - 8y' + 25y = 2e^{4x} \sin 3x + e^{-3x}(29x - 3) . \tag{21.20}$$

Résolution. 1)Recherchons la solution générale y_h de

$$y'' - 8y' + 25y = 0 . \tag{21.21}$$

$L(z) = z^2 - 8z + 25$, d'où les racines du polynôme caractéristique sont $4+3i$ et$4-3i$. Il s'ensuit :

$$y_h = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

où C_1 etC_2 sont des constantes arbitraires.
2) Nous allons appliquer Principe de superposition et nous occuper séparément de chacun des deux termes composant le second membre de (21.20).
a) Recherchons une solution particulière y_1 de

$$y'' - 8y' + 25y = 2e^{(4+3i)x} . \tag{21.22}$$

Puisque $4 + 3i$ est une racine simple de $L(z)$ on pose

$$y_1 = Ae^{(4+3i)x}x .$$

En remplaçant dans (21.22), on obtient $A = -\frac{i}{3}$ d'où

$$y_1 = -\frac{i}{3}e^{(4+3i)x}x = -\frac{ix}{3}e^{4x}(\cos 3x + i\sin 3x)\ .$$

b) Comme solution particulière y_2 de

$$y'' - 8y' + 25y = 2e^{4x}\sin 3x \tag{21.23}$$

nous pouvons prendre

$$y_2 = \operatorname{Im} y_1 = -\frac{x}{3}e^{4x}\cos 3x\ .$$

c) Recherchons une solution particulière y_3 de

$$y'' - 8y' + 25y = e^{-3x}(29x - 3)\ . \tag{21.24}$$

On pose

$$y_3 = e^{-3x}(Mx + N)\ .$$

En remplaçant dans (21.24), on obtient $M = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{2}{29}$. Il s'ensuit

$$y_3 = e^{-3x}(\frac{1}{2}x + \frac{2}{29})\ .$$

d) Pour obtenir une solution particulère y_p de (21.20), il suffit alors de prendre

$$y_p = y_2 + y_3 = -\frac{x}{3}e^{4x}\cos 3x + e^{-3x}(\frac{1}{2}x + \frac{2}{29})\ .$$

3) La solution générale y_g de (21.20) est $y_h + y_p$ c'est-à-dire

$$y_g = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) - \frac{x}{3}e^{4x}\cos 3x + e^{-3x}(\frac{1}{2}x + \frac{2}{29})$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Exemple 21.6. *Cherchons la solution de*

$$y'' + 2y' - 3y = (2x + 1)e^{-3x} + 4e^{x}\cos 2x \tag{21.25}$$

dont le graphe passe par le point $(0, -1)$ *et dont la pente de la tangente en ce point vaut* 1.

Résolution. Cherchons d'abord la solution générale de (21.25).
1) Recherchons la solution générale y_h de $y'' + 2y' - 3y = 0$.
$L(z) = z^2 + 2z - 3$, d'où les racines de $L(z)$ sont 1 et -3. Il s'ensuit

$$y_h = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\ .$$

2) Recherchons une solution particulière y_1 de

$$y'' + 2y' - 3y = (2x + 1)e^{-3x}\ .$$

Posons $y_1 = (Ax + B)xe^{-3x}$ puisque -3 est racine simple de $L(z)$. On obtient $A = -\frac{1}{4}$ et $B = -\frac{3}{8}$ d'où

$$y_1 = (-\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{8})e^{-3x}.$$

3) Recherchons une solution particulière y_2 de

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{(2i+1)x} .$$

Posons $y_2 = Ae^{(2i+1)x}$ puisque 2i+1 n'est pas racine de $L(z)$. On obtient $A = \frac{-2i-1}{5}$ d'où

$$y_2 = \frac{-2i - 1}{5}e^{(2i+1)x} .$$

3)Recherchons une solution particulière y_3 de

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^x \cos 2x .$$

Puisque $4e^x \cos 2x = \mathrm{Re}(4e^{(2i+1)x})$, on a

$$y_3 = \mathcal{R}y_2 = e^x(-\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x)$$

4) Pour obtenir une solution particulière y_p de (21.25) il suffit donc de prendre $y_p = y_1 + y_3$ c'est-à-dire

$$y_p = (-\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{8})e^{-3x} + (-\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x)e^x .$$

4) La solution générale y_g de (21.25) s'écrit $y_g = y_h + y_p$ d'où

$$y_g = C_1e^x + C_2e^{-3x} + (-\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{8})e^{-3x} + (-\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x)e^x$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

5) Cherchons maintenant la solution particulière demandée. On a

$$y_g' = C_1e^x + e^{-3x}(\frac{3x^2}{4} + \frac{5x}{8} - 3C_2 - \frac{3}{8}) + e^x(\frac{3}{5}\cos(2x) + \frac{4}{5}\sin 2x) .$$

On doit donc avoir

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = -\frac{4}{5} \\ C_1 - 3C_2 & = \frac{31}{40} \end{cases}$$

ce qui donne

$$C_1 = -\frac{13}{32} , \ C_2 = -\frac{63}{160} .$$

La solution particulière cherchée est donc

$$y = -\frac{13}{32}e^x + e^{-3x}(\frac{3x^2}{4} + \frac{5x}{8} + \frac{129}{160}) + e^x(\frac{3}{5}\cos(2x) + \frac{4}{5}\sin 2x) .$$

21.5 Exercices

1. Chercher la solution générale des équations différentielles suivantes, chercher une solution particulière vérifiant les conditions indiquées.

	Equation	Cond. initiales
1)	$y'' - y = x^2 + 1$	$y(0) = 1, y'(0) = 0$
2)	$y'' + y' + 4y = 0$	$y(0) = 0, y(1) = 2$
3)	$y'' + y' = x^2 - 1$	
4)	$y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$	
5)	$y'' + 9y = \cos 6x$	
6)	$y'' + y' - 2y = e^x \cos x$	$y(0) = 1, y'(0) = 0$
7)	$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$	
8)	$y'' - 4y' = x^2 - 2x$	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
9)	$y'' - 4y' + 13y = 50e^{-2x}$	
10)	$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(x + 1)$	
11)	$y'' + y = \sin x$	$y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$
12)	$y'' - 6y' + 9y = 7e^{3x} + \sin x$	
13)	$y'' - 4y' + 3y = (3x^2 + 1)e^{3x}$	
14)	$y'' + y' + y = xe^{2x} \sin x$	
15)	$y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$	
16)	$y'' + 9y = x \cos x$	
17)	$y'' + y = x(e^x - \sin x)$	
18)	$y'' - 2y' + y = 1 + x^2 + 2 \sin 2x$	
19)	$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$	
20)	$y'' - y' = \frac{2e^x}{e^x - 1}$	

2. Chercher des solutions particulières y_1, y_2 de $y'' + y = \cos x$ telles que :
a) le graphe correspondant à y_1 passe par le point $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et ait comme tangente en ce point la droite $y = x$;
b) y_2 admette un extrémum local pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

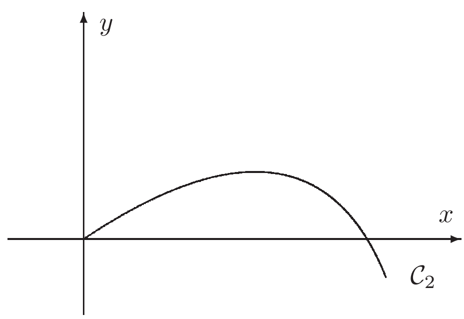


FIGURE 21.5: trajectoire $\mathcal{C}_2$

3. On considère : $y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (1)$.
Chercher des solutions particulières y_1, y_2 de (1) telles que :
a) le graphe $\mathcal{C}_1$ correspondant à y_1 coupe l'axe des x en $\frac{\pi}{2}$ et ait en ce point

une tangente parallèle au vecteur $(1,2)$. Quelles sont les autres points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe des x.
b) le graphe $\mathcal{C}_2$ correspondant à y_2 coupe l'axe des x en $\frac{\pi}{2}$ et l'aire de la partie représentée sur la figure 21.5 vaut 3.

21.6 Equations différentielles linéaires du 2^e ordre à coefficients variables

Certains des résultats ci-dessus sont encore valables dans le cas où les coefficients sont variables, c'est-à-dire pour l'équation

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{21.26}$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $f(x)$ sont continues dans un intervalle I. Ainsi on peut montrer que le Théorème d'existence et d'unicité de la solution (théorème 62) vu pour les équations linéaires à coefficients constants est maintenu, plus précisément :

si x_0 est fixé dans I, alors pour tout y_0, v_0 fixés, il existe une et une seule fonction y deux fois continûment dérivable dans I, vérifiant (21.26) et telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = v_0$.

Les solutions de l'équation homogène

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{21.27}$$

forment encore un espace vectoriel de dimension 2 et, pour obtenir toutes ces solutions, il suffit donc d'en avoir deux qui soient linéairement indépendantes, le théorème 57 est donc encore vérifié :

si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (21.27) linéairement indépendantes, alors la solution générale de (21.27) est $C_1y_1 + C_2y_2$ où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

Malheureusement on ne dispose pas de méthode générale permettant de trouver effectivement deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène et dès lors on n'a pas non plus de méthode générale pour la résoudre.

Signalons encore que le théorème 59 (caractérisant au moyen du wronskien le fait que deux solutions soient linéairement indépendantes) est encore vérifié pour l'équation (21.27).

Pour ce qui est de la recherche d'une solution particulière de (21.26), la Méthode par variation de constantes est encore applicable. Par contre la Méthode des coefficients indéterminés n'est plus applicable.

21.7 Applications à l'oscillateur harmonique

Considérons un point matériel P de masse m attaché à un ressort dont l'autre extrémité est fixe. Le point P se meut sur une droite et soit O la position du point

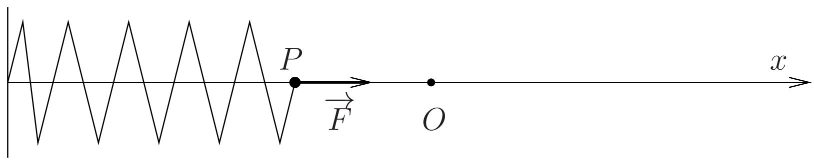


FIGURE 21.6: oscillateur

P lorsque le ressort n'est ni comprimé, ni étendu. On est ainsi en présence d'un oscillateur rectiligne comme illustré sur la figure 21.6.

Etudions le mouvement du point P et pour mesurer les déplacements de ce point, orientons la droite sur laquelle s'effectue le mouvement et notons x la mesure du segment OP. Soit $R(x)$ la force exercée par le ressort (force de rappel du ressort) sur le point P, la mesure $R(x)$ a le signe opposé de x et on admet qu'en valeur absolue $|R(x)|$ est proportionnel à $|x|$, par conséquent $R(x)$ est de la forme

$$R(x) = -kx$$

où k est une constante > 0 (la constante élastique du ressort). Comme instant initial prenons 0.

1. Oscillateur harmonique sans frottement

Envisageons d'abord le cas où le mouvement du point s'effectue sans frottement. L'équation du mouvement de P s'écrit donc

$$mx'' = -kx$$

c'est-à-dire

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = 0} \tag{21.28}$$

si on pose

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

ω_0 est donc une constante positive. On sait que la solution générale de (21.28) est donnée par

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{21.29}$$

où $A > 0$ et φ peut être choisi entre $]-\pi, \pi]$. La constante ω_0 est appelée la **pulsation propre** de l'oscillateur et si on pose

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\,,$$

ν_0 est appelée la **fréquence propre** de l'oscillateur.

Les constantes A et φ sont évidemment déterminées par les conditions initiales :

$$x_0 = A\sin\varphi \text{ et } x_0' = A\omega_0\cos\varphi\,.$$

Si x_0 et x_0' ne sont pas tous deux nuls, *le mouvement du point P est périodique de pulsation ω_0*. On est donc en présence d'une oscillation périodique.

2. Oscillateur harmonique amorti

Envisageons maintenant le cas, plus fréquent, où le mouvement du point P est soumis à un frottement et admettons que la force de frottement, forcément de sens opposé au mouvement, soit proportionnelle à la masse du point et à sa vitesse, la force de frottement peut donc se mettre sous la forme $-2m\gamma x'$ où γ est une constante positive (dépendant de l'oscillateur). L'équation de mouvement s'écrit donc

$$mx'' = -kx - 2m\gamma x'$$

c'est-à-dire

$$\boxed{x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0}\,. \tag{21.30}$$

Bien entendu $x \equiv 0$ est solution de (21.30). Il s'agit de la seule solution de (21.30) vérifiant les deux conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$. Dorénavant intéressons-nous aux solutions non identiquement nulles. Le polynôme caractéristique étant $z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2$, trois cas peuvent se présenter.

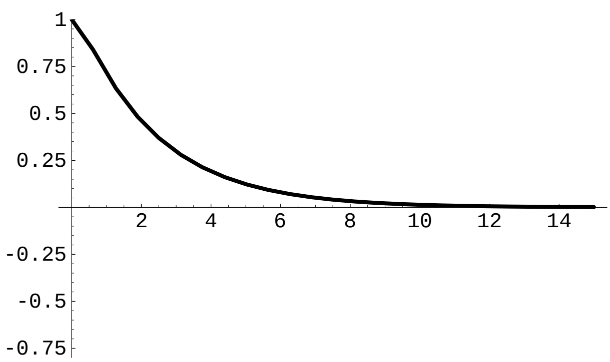


FIGURE 21.7: amortissement fort dans le cas $\gamma = 2.5 > \omega_0 = 2$

Amortissement fort : $\gamma > \omega_0$.

Les racines du polynômes caractéristique sont

$$-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,.$$

Pour alléger les écritures posons

$$\lambda_1 := \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 := \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,.$$

Les constantes λ_1, λ_2 sont positives et $\lambda_1 < \lambda_2$. Les racines du polynôme caractéristiques sont donc $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ et la solution générale de (21.30) est

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}\,.$$

Il s'ensuit

$$x'(t) = -\lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 t} \ .$$

Les constantes C_1 et C_2 s'obtiennent aisément au départ des conditions initiales en résolvant le système

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x(0) \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = -x'(0) \end{cases}$$

Etudions $x(t)$ pour $t \geq 0$.

1. Puisque λ_1 et λ_2 sont > 0, on a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. La position limite du point est donc l'origine O.
2. La dérivée $x'(t)$ ne peut s'annuler que si

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = -\frac{C_2\lambda_2}{C_1\lambda_1} \ .$$

Ici on ne considère que des $t \geq 0$. Par conséquent
— soit $-\frac{C_2\lambda_2}{C_1\lambda_1} < 1$ et $x'(t)$ ne s'annule pas pour un $t \geq 0$. Alors le point ne change pas de sens parcours et ne peut donc passer par l'origine 0.
— soit $-\frac{C_2\lambda_2}{C_1\lambda_1} \geq 1$ et $x'(t)$ s'annule une seule fois pour un $t \geq 0$. Alors le point change une seule fois de sens de parcours. Le point soit ne passe pas par l'origine, soit passe une seule fois par l'origine.

Par conséquent

le point P, qui tend vers le point d'équilibre O, ne peut changer de côté par rapport à O qu'au plus une seule fois ; après cet éventuel changement de côté $x(t)$ tend vers 0 de façon monotone. Le mouvement de P n'est donc pas oscillatoire autour du point O.

Amortissement critique : $\gamma = \omega_0$.

La solution générale de (21.30) s'écrit

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 t + C_2) \ .$$

Il s'ensuit

$$x'(t) = e^{-\gamma t}(-\gamma C_1 t - \gamma C_2 + C_1) \ .$$

De nouveau C_1 et C_2 s'expriment au moyen des conditions initiales :

$$C_2 = x(0) \text{ et } C_1 = x'(0) + \gamma x(0) \ .$$

De nouveau $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ et $x'(t)$ s'annule au plus une fois. On peut donc refaire pour $x(t)$ la même analyse que dans le cas de l'amortissement fort.

Amortissement faible : $\gamma < \omega_0$.

Le polynôme caractéristique a donc les racines complexes $-\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. On sait que la solution générale de (21.30) est de la forme

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \varphi) \ .$$

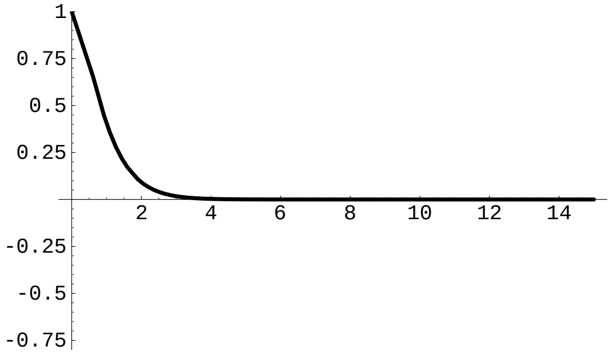


FIGURE 21.8: amortissement critique dans le cas $\gamma = \omega_0 = 2$

Alors A et φ s'obtiennent au départ des conditions initiales par

$$A \sin\varphi = x(0) \text{ et } A\cos\varphi = \frac{x'(0) + \gamma x(0)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \ .$$

De nouveau $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ mais cette fois, de par la forme de $x(t)$

le point P tend vers la point O en oscillant autour de ce point, le facteur d'amortissement de l'oscillation étant $e^{-\gamma t}$.

De plus

la période de l'oscillation $2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ est supérieure à $2\pi/\omega_0$ qui est la période de l'oscillateur non amorti ; la période d'oscillation et le facteur d'amortissement (à savoir $e^{-\gamma t}$) sont tous deux indépendants des conditions initiales.

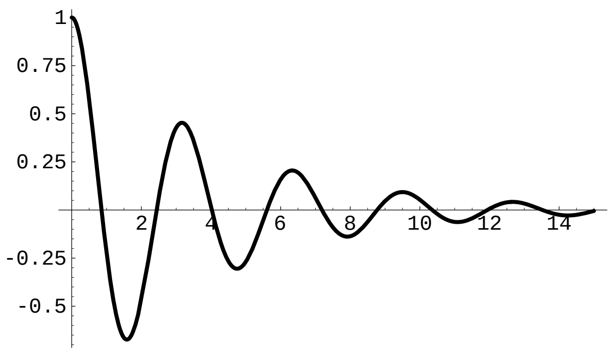


FIGURE 21.9: amortissement faible dans le cas $\gamma = 0.25 < \omega_0 = 2$

On a illustré ces trois situations en fixant $\omega_0 = 2$, en prenant les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$ et en changeant la constante d'amortissement γ : sur la figure 21.7, on a pris $\gamma = 2.5 > \omega_0$ (amortissement fort), sur la figure 21.8, on a pris $\gamma = 2 = \omega_0$ (amortissement critique) et sur la figure 21.9, on a pris $\gamma = \frac{1}{4} < \omega_0$ (amortissement faible).

3. Oscillateur forcé et amorti

Envisageons maintenant le cas de l'**oscillateur forcé et amorti** : par rapport à l'oscillateur harmonique amorti on suppose ici que point P est soumis en plus à une force extérieure $F(t)$. L'équation de mouvement s'écrit alors

$$mx'' + 2m\gamma x' + m\omega_0^2 x = F(t)\ . \tag{21.31}$$

Envisageons le cas important où la force extérieure $F(t)$ est de la forme $F_0 \cos \omega t$ où $F_0 > 0$ et $\omega \geq 0$, l'équation de mouvement s'écrit donc

$$\boxed{x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t}\ . \tag{21.32}$$

La solution générale de cette équation s'obtient en superposant la solution générale déjà obtenue pour l'oscillateur harmonique amorti, notée x_{amorti}, et une solution particulière x_p de (21.32). Pour chercher x_p envisageons d'abord l'équation

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}\ . \tag{21.33}$$

Remarquons : puisque $\gamma \neq 0$, le nombre imaginaire $i\omega$ ne peut être racine du polynôme caractéristique, par conséquent on peut trouver une solution particulière x_1 de (21.33) qui soit de la forme

$$x_1 = be^{i\omega t}\ , \tag{21.34}$$

un simple calcul nous donne

$$b = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)}\quad .$$

Soient α, δ respectivement le module, l'argument de

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}\ ,$$

il s'ensuit

$$\alpha e^{i\delta} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}\ .$$

Les quantités ω_0 et γ dépendent de l'oscillateur considéré, si on suppose celui-ci fixé, *les quantités α et δ dépendent donc uniquement de la pulsation ω de la force extérieure.* En remplaçant dans (21.34) on obtient

$$x_1 = \frac{F_0}{m}\, \alpha\, e^{i(\omega t + \delta)}$$

et, en prenant pour x_p la partie réelle de x_1 , on obtient

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m} \alpha \cos(\omega t + \delta) \ . \tag{21.35}$$

Remarquons que la solution $x_p(t)$ ne dépend pas des conditions initiales.

La solution générale $x(t)$ de l'équation de mouvement (21.33) est donc

$$x(t) = x_{amorti}(t) + x_p(t) = x_{amorti}(t) + \frac{F_0}{m} \alpha \cos(\omega t + \delta) \ .$$

On sait que $\lim_{t\to+\infty} x_{amorti}(t) = 0$, par contre $x_p(t)$ est périodique, par conséquent

à partir d'un certain moment $x_{amorti}(t)$ va apparaître comme négligeable devant $x_p(t)$, à partir de ce moment le mouvement observé apparaîtra comme indépendant des conditions initiales.

Etudions de plus près $x_p(t)$.

$x_p(t)$ est périodique et a la même période que la force $F(t)$, elle subit un déphasage δ par rapport à celle-ci. Son amplitude est $\frac{F_0}{m}\alpha$ et est donc proportionnel à l'amplitude de $F(t)$,à la grandeur α et inversement proportionnel à m.

4. Le modèle de l'oscillateur harmonique

L'étude de l'oscillateur harmonique s'applique à d'autres problèmes que celui du mouvement d'un ressort. En effet d'autres problèmes donnent lieu aux même équations que celles rencontrées ci-dessus et ces problèmes ont donc les mêmes solutions. Le ressort que nous avons considéré est en fait l'occasion d'introduire des modèles mathématiques applicables dans bien d'autres situations, en fait **toute modélisation faisant apparaître une des équations (21.28), (21.30), (21.31) déjà rencontrées ou une équation de la forme (21.39) qu'on rencontrera bientôt est appelée un oscillateur harmonique. On rencontre ainsi des modèles d'oscillateur harmonique dans tous les domaines!** Nous allons en voir un exemple en électricité.

Considérons un circuit électrique RLC composé d'une capacité de C farads, d'une résistance de R ohms, d'une inductance de L henrys et d'une source électrique introduisant un voltage de $E(t)$ volts, notons $q(t)$ la charge électrique correspondant au courant parcourant le circuit. D'après la Loi de Kirchhoff on a

$$L\, q''(t) + R\, q'(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t) \ .$$

Supposons que la source électrique délivre un courant alternatif, par exemple supposons $E(t) = E_0 \cos\omega t$, alors l'équation ci-dessus devient

$$q''(t) + \frac{R}{L} q'(t) + \frac{1}{LC} q(t) = \frac{E_0}{L} \cos\omega t \ . \tag{21.36}$$

Si nous traduisons 2γ par $\frac{R}{L}$ et ω_0^2 par $\frac{1}{LC}$, nous sommes donc en présence de la même équation que celle rencontrée pour l'oscillateur harmonique amorti et forcé. On peut donc appliquer les conclusions de ce problème aux solutions $q(t)$ du circuit RLC considéré.

5. Phénomène de résonance

Plaçons-nous encore dans le cas de l'oscillateur forcé amorti et continuons l'étude faite ci-dessus.

Etudions la dépendance de l'amplitude de $x_p(t)$ par rapport à la force extérieure $F_0 \cos wt$. Cette amplitude vaut

$$\frac{F_0}{m}\alpha \quad .$$

La dépendance par rapport à F_0 est très simple et sans surprise puisque l'amplitude de $x_p(t)$ est proportionnel à F_0 . Mais la pulsation ω est aussi déterminante car elle intervient dans α. Aussi étudions la dépendance de α par rapport à ω, écrivons donc $\alpha(\omega)$, on a :

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \ .$$

Remarquons :

$$\alpha(0) = 1/\omega_0^2 \text{ et } \lim_{\omega \to +\infty} \alpha(\omega) = 0 \ .$$

De plus $\alpha'(\omega)$ est de la forme

$$\frac{-4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)}{K}$$

où K est positif. Deux cas se présentent donc :

1. Si $\boldsymbol{\omega_0 \leq \sqrt{2}\,\gamma}$, alors $\alpha'(w) < 0$ dans $[0, +\infty[$ et $\alpha(\omega)$ décroît continuellement vers 0 lorsque ω tend vers $+\infty$.
2. Si $\boldsymbol{\omega_0 > \sqrt{2}\,\gamma}$, $\alpha(\omega)$ prend sa valeur maximale pour

$$\boxed{w = w_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \tag{21.37}$$

Cette pulsation donnant à $x_p(t)$ son amplitude maximale est appelée la **pulsation de résonance du système**, lorsqu'on est dans ces conditions on est en présence d'un phénomène de **résonance**. Le valeur maximale de $\alpha(w)$ vaut

$$\alpha(\omega_R) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \ . \tag{21.38}$$

Il ne peut donc y avoir de phénomène de résonance dans les cas de l'amortissement fort ($\omega_0 < \gamma$) et de l'amortissement critique ($\omega_0 = \gamma$). Même l'amortissement faible ($\omega_0 > \gamma$) ne le rend pas nécessairement possible. Il faut un amortissement faible "accentué" ($\omega_0 > \sqrt{2}\,\gamma$), pour que, pour un choix particulier de ω, il y ait résonance.

Voyons comment évolue le phénomène de résonance lorsque l'amortissement diminue, c'est-à-dire lorsque γ diminue. On a

$$\frac{d\alpha(\omega_R)}{d\gamma} = \frac{2\gamma^2 - \omega_0^2}{2\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)^{3/2}} \quad < 0 \ ,$$

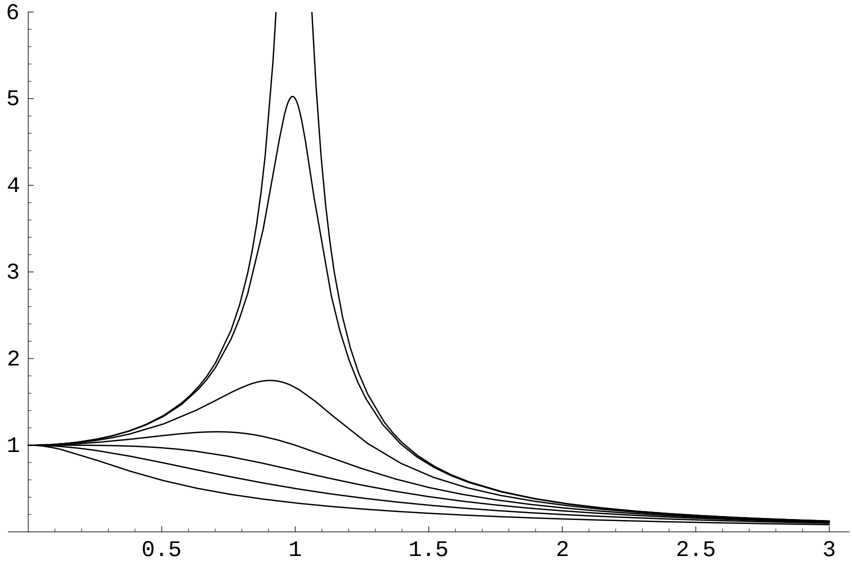


FIGURE 21.10: graphe de $\alpha(w)$ pour $\gamma = 1.5, 1, 1/\sqrt{2}, 0.5, 0.3, 0.1, 0.05$

et

$$\lim_{\gamma\to 0} \alpha(\omega_R) = \infty \ ,$$

l'amplitude de résonance augmente donc sans aucune limitation lorsque l'amortissement diminue. Elle tend vers l'infini lorsque l'amortissement tend vers 0.

La discussion ci-dessus est illustrée sur la figure 21.10 : on a considéré le cas où $m = 1$, $\omega_0 = 1$. Alors le seuil (pour γ) en dessous duquel le phénomène de résonance est possible, est $1/\sqrt{2}$. On a représenté les graphes de $\alpha(\omega)$ pour $\gamma = 1.5, 1, 1/\sqrt{2}$ (pas de résonance possible) et pour $\gamma = 0.5, 0.3, 0.1, 0.05$ (résonance pour $\omega = \omega_R$), on constate effectivement que l'amplitude de résonance augmente fortement lorsque γ diminue.

6. Oscillateur harmonique non amorti forcé

Supposons qu'il n'y a pas d'amortissement et qu'il y a une force extérieure $F(t)$ de la forme $F_0 \cos\omega t$. L'équation de mouvement est

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = F_0 \cos\omega t} \ . \tag{21.39}$$

La solution générale s'écrit en superposant la solution générale $x_h$de l'oscillateur harmonique non amorti (c-à-d (21.29)) avec une solution particulière x_p.

La solution générale x_h est

$$x_h(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

où les constantes arbitraires sont $A \geq 0$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$. Ici la solution de l'équation homogène est périodique, il n'y a donc plus de raison de la négliger à partir d'un certain moment.

Pour chercher une solution particulière y_p de (21.39), on doit chercher une solution particulière y_1 de

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = F_0 e^{i\omega t}} \,. \tag{21.40}$$

et prendre ensuite pour y_p la partie réelle de y_1.

Deux cas se présentent :

1. $\boldsymbol{\omega \neq \omega_0}$.
Alors on vérifie aisément que
$$x_1 = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t} \,,$$
et donc
$$x_p = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \,,$$
La solution générale s'écrit
$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \,.$$
— Si $\omega < \omega_0$, l'amplitude de $x_p(t)$ est $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ et décroît si ω décroît ;
— si $\omega > \omega_0$, l'amplitude de $x_p(t)$ est $\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$ et décroît si ω croît.
Il n'y a donc pas de valeur de ω qui rende l'amplitude maximale. Alors il n'y a donc pas de valeur de ω donnant lieu à un phénomène de résonance.

2. $\boldsymbol{\omega = \omega_0}$.
C'est un cas apriori intéressant car la situation rencontrée à la section précédente dans l'étude de la résonance nous invite à considérer le cas extrême où il n'y aurait plus d'amortissement ($\gamma = 0$) et où ω continuerait à vérifier (21.37) et serait donc égal à ω_0 . L'équation est :
$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega_0 t} \,. \tag{21.41}$$
On vérifie aisément que x_p s'écrit :
$$x_p(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t \,.$$
La solution générale s'écrit donc
$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$
A la solution périodique $x_h(t)$ on ajoute donc une oscillation dont l'amplitude est $\frac{F_0}{2\omega_0} t$ et croit proportionnellement au temps, l'amplitude de l'oscillation tend alors vers l'infini ! *On est alors en présence d'un phénomène de résonance extrême* et il est clair qu'on peut difficilement concevoir des systèmes pouvant supporter de telles oscillations.

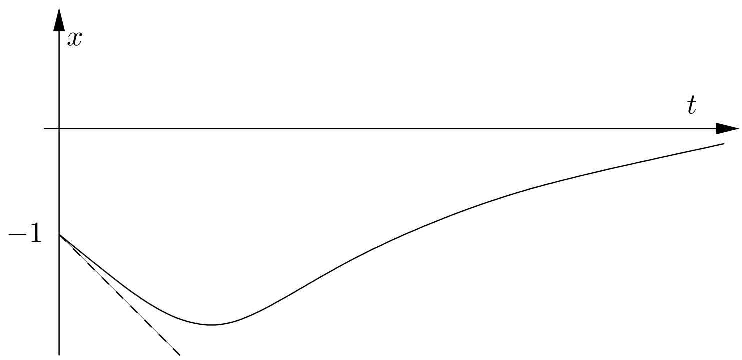
7. Exercices résolus

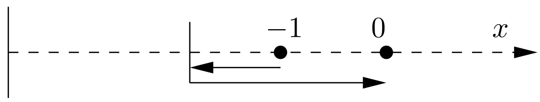
Exemple 21.7. *On considère un ressort horizontal dont la position d'équilibre correspond à l'origine. Supposons : la force de rappel du ressort est* $-16x$*, la force de frottement est* $-10x'$ *et la masse du point attaché à l'extrémité vaut* 1*. On suppose qu'il n'y a pas d'autres forces appliquées au point.*

1. *Ecrivons l'équation différentielle modélisant le mouvement du point extrémité du ressort.*
2. *Donnons la solution générale de cette équation.*
3. *Combien de fois le point peut-il changer de sens de parcours.*
4. *Considèrons les deux cas particuliers suivants :*
   — *Cas 1 :* $x(0) = -1$ *et* $x'(0) = -1$,
   — *Cas 2 :* $x(0) = -1$ *et* $x'(0) = 3$.
   Dans chacun de ces deux cas traçons la trajectoire solution et déduisons-en comment bouge le point extrémité du ressort.

Résolution.

1. $x'' = -10x' - 16x$ d'où l'équation de mouvement s'écrit
$$x'' + 10x' + 16x = 0$$
2. Les racines du polynôme caractéristique sont -2 et -8. La solution générale de cette équation est donc
$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t} \, .$$
3. Le point change de sens de parcours lorsque la dérivée s'annule. Cherchons $x'(t)$, on a :
$$x'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t} \, .$$
   Par conséquent $x'(t)$ s'annule si et seulement si
$$e^{6t} = -\frac{4C_2}{C_1} \, . \tag{21.42}$$
   Seuls les t positifs nous intéressent, en se rappelant le graphe de e^{6t}, on a :
   — si $-\frac{4C_2}{C_1} < 1$, la dérivée $x'(t)$ ne s'annule pas pour un $t \geq 0$,
   — si $-\frac{4C_2}{C_1} \geq 1$, la dérivée $x'(t)$ s'annule une seule fois pour un $t \geq 0$.
   En conclusion, la dérivée s'annule au plus une fois et donc le point change de sens de parcours au plus une fois.
4. On sait $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Esquissons la trajectoire solution et précisons le mouvement du point.
   (a) Cas 1 : $x(0) = -1$ et $x'(0) = -1$.
   Une seule possibilité se présente : $x'(t)$ doit obligatoirement s'annuler une fois et une seule fois.





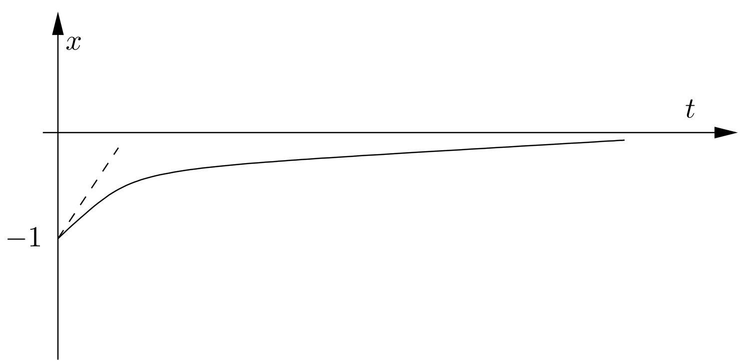
5. Cas 2 : $x(0) = -1$ et $x'(0) = 3$.
   A priori $x'(t)$ peut s'annuler une fois ou aucune fois. Pour en savoir plus cherchons C_1 et C_2. On a :

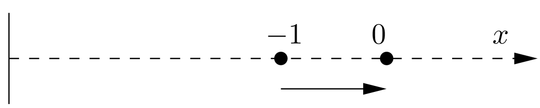
$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = -1 \\ -2C_1 - 8C_2 & = 3 \end{cases}$$

Il s'ensuit $C_1 = -5/6$ et $C_2 = - - 1/6$. L'équation (21.42) devient donc :

$$e^{6t} = -\frac{4}{5}$$

qui n'a pas de solution. La dérivée $x'(t)$ ne s'annule donc pas. Nous avons donc la trajectoire et le mouvement suivant.





Exemple 21.8. *On considère l'oscillateur forcé d'équation*

$$x'' + 2x' + 5x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \ .$$

Le phénomène de résonance est-il possible ? Si oui, quand se produit-il ?

Résolution. En appliquant l'étude faite plus haut où $\gamma = 1$ et $\omega_0 = \sqrt{5}$, on obtient

$$x(t) = x_{amorti}(t) + \frac{F_0}{m}\alpha(w) \cos(\omega t + \delta)$$

où

$$\alpha e^{i\delta} = \frac{1}{5 - \omega^2 + 2i\omega} \ .$$

Pour voir si la résonance est possible étudions $\alpha(\omega)$ et voyons si $\alpha(\omega)$ a un maximum. On a

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} \qquad (\omega > 0) \ .$$

Cherchons $\alpha'(\omega)$

$$\begin{aligned} \alpha'(\omega) &= -\frac{1}{2}((5-\omega^2)^2 + 4\omega^2)^{-3/2}((5-\omega^2)(-4\omega) + 8\omega) \\ &= 2\omega((5-\omega^2)^2 + 4\omega^2)^{-3/2}(3-\omega^2) \\ &= E(w)(3-\omega^2) \end{aligned}$$

où $E(\omega)$ est toujours > 0. Par conséquent $\alpha(\omega)$ croît pour $0 < \omega < \sqrt{3}$, décroît pout $\omega > \sqrt{3}$ et prend sa valeur maximale pour $\omega = \sqrt{3}$. Il y a donc résonance pour $\omega = \sqrt{3}$.

Annexe A

Solutions des exercices relatifs aux équations différentielles

Page 264, exercices 1, solutions générales

1) $\dfrac{1}{x-C}$

2) $\ln(\dfrac{x^4}{4} - x + C)$

3) $\dfrac{C}{\sqrt{1-C^2x^2}}$

4) $Ce^{\frac{x^2}{2}}$

5) $C \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

6) Ce^{-e^x}

7) $-\ln(C-x)$

8) $Ce^{\frac{x^2}{2}} - (x^2+2)$

9) $\dfrac{x^3}{2} + Cx$

10) $x + Cx^2$

11) $\dfrac{1}{1-x^2}(\dfrac{x^3}{3} + C)$

12) $C(x + \sqrt{1+x^2})$

13) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}(\dfrac{x^2}{2} + x + C)$

14) $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2+Ce^{4x}}}$

15) $\dfrac{4x^2 + 4x\sqrt{1+x^2} + 4\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C}{x + \sqrt{x^2+1}}$

16) $\dfrac{e^{2x}(x^2-2x+C)}{2} - \dfrac{2x+1}{4}$

17) $\dfrac{1}{\ln x + Cx + 1}$

18) $\dfrac{1}{x^2+2x+2+Ce^x}$

19) $\dfrac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$

20) $Ce^{-2x} + x^2 - \dfrac{5x}{2} + \dfrac{15}{4}$

21) $Ce^{-3x} + \dfrac{e^{2x}}{5}$

22) $e^{-x}(\dfrac{1}{2}x^2 + C)$

23) $x^4(C + \dfrac{1}{2}\ln x)^2$

24) $\frac{x-1}{2x+3}(C - e^x(2x^2+x+2))$

Page 264, exercices 2

a) $y_G = e^x(x+C)$ b) $y_1 = e^x(x-4)$ c) $y_2 = e^x(x - 1 - \frac{1}{e})$

Page 283, exercices 1, solutions générales

1) $C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 - 3$
2) $C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x$
3) $C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x$
4) $e^{2x}(C_1 - 5x) + C_2e^{3x}$
5) $C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \dfrac{1}{27}\cos 6x$
6) $C_1e^{-2x} + C_2e^x + \dfrac{e^x}{10}(3\sin x - \cos x)$
7) $e^{-x}(x^2 + C_1x + C_2)$
8) $C_1 + C_2e^{4x} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{3x^2}{16} + \dfrac{3x}{32}$
9) $C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x + 2e^{-2x}$
10) $e^{3x}(C_1x + C_2) + e^{3x}x^2(\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{2})$
11) $C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{1}{2}x\cos x$
12) $(C_1x + C_2)e^{3x} + \dfrac{7}{2}x^2e^{3x} + \dfrac{3}{50}\cos x + \dfrac{2}{25}\sin x$
13) $C_1e^x + C_2e^{3x} + e^{3x}(\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{4}x)$
14) $e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}) + C_2\sin(\dfrac{\sqrt{3}x}{2})] + \dfrac{e^{2x}}{61^2}[(278 - 305x)\cos x - (175 - 366x)\sin x]$
15) $e^{-x}(C_1 + C_2x) - e^{-x}\cos x + \dfrac{1}{6}x^3e^{-x}$
16) $C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{1}{32}(4x\cos x + \sin x)$
17) $C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}(x-1)e^x + \dfrac{1}{4}(x^2\cos x - x\sin x)$
18) $(C_1 + C_2x)e^x + x^2 + 4x + 7 + \dfrac{2}{25}(4\cos 2x - 3\sin 2x)$
19) $C_1\cos x + C_2\sin x + (\cos x)\ln|\cos x| + x\sin x$
20) $C_1 + (C_2 - 2x)e^x + (e^x - 1)\ln(e^x - 1)^2$

Page 283, exercices 3,4

2) $y_1 = -\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{4}(\pi + 2x)\sin x, \quad y_2 = \dfrac{1}{2}(\cos x + x\sin x)$
3) $y_1 = \dfrac{2}{3}e^{x-\frac{\pi}{2}}\cos 3x, \quad y_2 = \dfrac{10e^x}{1 + e^{\frac{\pi}{3}}}\sin 3x$

Bibliographie

[1] M. Boffa et A. Pétry, *Des naturels non standard à l'Analyse non standard, une introduction*, Mathématique et Pédagogie, vol. 94, 1993, pp. 39-54.

[2] Euler, traduction de J.D. Blanton,*Foundations of Differential Calculus*, Ed. Springer, 2000.

[3] P. Fermat, *Précis des oeuvres mathématiques et de l'arithmétique de Diophante*, présentation de E. Brassinne (1853), réédition Ed J. Gabay, 2005.

[4] R. Courant et F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*, volume I et volume II, Springer, 1989.

[5] A. Dahan-Dalmenico et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques, route et dédales*, Ed. Seuil, 1986.

[6] P. Davies, *Applied Nonstandard Analysis*, réédition Dover Publications, 2005.

[7] E. Hairer et G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001.

[8] J. Havelange et A. Pétry, *Algèbre, complexes et matrices*, Ed. Céfal, 2011.

[9] H.J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, 1977.

[10] H.J. Keisler, *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, 1986.

[11] T. Lindstrøm, *An invitation to nonstandard analysis* , dans N. Cutland (Ed.), *Nonstandard Analysis and its Applications*, 1-105. Cambridge Univ. Press,1988.

[12] J. Mawhin, *Analyse*, De Boeck Université, 1992.

[13] A. Pétry, *Balade en Analyse non standard sur les traces de A. Robinson*, dans "*Non standard analysis*", Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 1996.

[14] A. Pétry, *Enseigner l'Analyse sur base des méthodes non standard, deux aspects : microscope et ensembles internes*, dans "*Logique dans l'enseignement des Mathématiques*", Belgian Mathematical Society, vol. 5, n^o5, supplément, 45-62.

[15] A. Pétry, *A propos des tangentes à une courbe, une présentation non standard* dans "*A tribute to Maurice Boffa*", Belgian Mathematical Society, décembre 2001, 155-166.

[16] A. Pétry, *Analyse infinitésimale, une présentation non standard*, Ed. Céfal 2010. Consultable sur `http://www.mathetlogique.be/ans`.

[17] A. Robinson, *Non-standard analysis* , Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64, 1961, 432-440.

[18] A. Robinson, *Non-standard analysis* , revised Edition, Princeton University Press, 1996.

Index